

Business-Statistik

Anwendungsorientierte Theorie mit Beispielen
Aufgaben mit kommentierten Lösungen
Tabellen-Sammlung
Formelsammlung
Fachwörter Deutsch–Englisch–Deutsch
Glossar

Oscar A. G. Treyer

zweite, leicht überarbeitete Auflage



Inhaltsverzeichnis

INHALTSVERZEICHNIS	I
VORWORT	VII
1 EINFÜHRUNG	1
1.1 WAS BEDEUTET 'STATISTIK'	1
1.2 ARTEN VON STATISTIK	1
1.3 ARTEN, MESSUNG UND GEWINNUNG	1
1.3.1 ARTEN	1
1.3.2 NIVEAU DER MESSUNG	2
1.3.3 DATENGEWINNUNG	3
1.4 TABELLEN	3
1.5 NUTZEN UND MISSBRAUCH DER STATISTIK	4
2 HÄUFIGKEITSVERTEILUNG	7
2.1 ERKLÄRUNG AM BEISPIEL	7
2.2 REPETITIONSFRAGE	11
2.2.1 FAHRKILOMETER EINER PKW-FLOTTE	11
3 GRAFISCHE DARSTELLUNGEN	12
3.1 STAMM-UND-BLATT-DIAGRAMME	12
3.2 LINIEN-DIAGRAMME	13
3.3 SÄULEN- UND BALKEN-DIAGRAMME	14
3.4 KREIS-DIAGRAMME	15
3.5 WEITERE GRAFISCHE DARSTELLUNGEN	16
3.6 REPETITIONSFRAGEN	17
3.6.1 GESCHWINDIGKEITSMESSUNGEN	17
3.6.2 FARBPREFERENZEN VON AUTOKÄUFERN	17
3.6.3 ZIVILSTAND IN DEN USA	17
3.6.4 KARTOFFEL-ERNTE	18
4 INDEXZAHLEN	19
4.1 UNGEWOGENER INDEX	19
4.2 GEWOGENE INDIZES	21
4.3 UMBASIEREN UND VERKETTEN VON INDEX-REIHEN	24
4.4 AKTIENKURS-INDIZES IN DER PRAXIS	25

4.5 REPETITIONSFRAGEN	29
4.5.1 KONZERNUMSATZ-ENTWICKLUNG	29
4.5.2 AUSWIRKUNG DER INFLATION AUF DIE ERFOLGSRECHNUNG EINES UNTERNEHMENS	30
4.5.3 PREIS- UND MENGENENTWICKLUNG EINES SCHNELLIMBISSRESTAURANTS IN ZÜRICH	30
4.5.4 EINKAUFS- UND VERKAUFSPREISENTWICKLUNG EINES HANDELSUNTERNEHMENS	31
5 MITTELWERTE UND KENNZAHLEN DER STREUUNG	32
5.1 MITTELWERTE	32
5.1.1 EINFACHES ARITHMETISCHES MITTEL	32
5.1.2 GEWOGENES ARITHMETISCHES MITTEL	34
5.1.3 MEDIAN	35
5.1.4 MODUS	36
5.1.5 GEOMETRISCHES MITTEL	37
5.2 KENNZAHLEN DER STREUUNG	39
5.2.1 SPANNWEITE	39
5.2.2 QUARTILE	40
5.2.3 MITTLERE BZW. DURCHSCHNITTliche ABSOLUTE ABWEICHUNG VOM ARITHMETISCHEN MITTEL	40
5.2.4 STANDARDABWEICHUNG	41
5.2.5 VARIANZ	43
5.2.6 VARIATIONSKOEFFIZIENT UND SHARPE-KENNZAHL	44
5.2.7 SCHIEFE	45
5.2.8 TSCHEBYSCHEFFSCHE THEOREM	47
5.2.9 EMPIRISCHES GESETZ	47
5.3 REPETITIONSFRAGEN	48
5.3.1 ANZAHL DEFEKTER TEILE	48
5.3.2 EINKAUFS- UND VERKAUFSPREISE	48
5.3.3 FAHRKILOMETER EINER PKW-FLOTTE	49
5.3.4 ANZAHL ARBEITSUNFÄLLE IN EINEM UNTERNEHMEN	49
6 WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG	50
6.1 WAS BEDEUTET 'WAHRSCHEINLICHKEIT'	50
6.2 ARTEN VON WAHRSCHEINLICHKEITEN	51
6.2.1 THEORETISCHE WAHRSCHEINLICHKEIT	51
6.2.2 STATISTISCHE WAHRSCHEINLICHKEIT	51
6.2.3 SUBJEKTIVE WAHRSCHEINLICHKEIT	52
6.3 WICHTIGSTE RECHENREGELN	53
6.3.1 KOMPLEMENTÄRES EREIGNIS	53
6.3.2 EINFACHE ADDITIONSREGEL	53
6.3.3 EINFACHE MULTIPLIKATIONSREGEL	53
6.3.4 VERALLGEMEINERTE ADDITIONSREGEL	54
6.3.5 BEDINGTE WAHRSCHEINLICHKEIT	54
6.3.6 VERALLGEMEINERTE MULTIPLIKATIONSREGEL	54
6.4 STRATEGIE-ENTSCHEID UND UNSICHERHEIT	58
6.4.1 DARSTELLUNG AN EINEM EINFACHEN BEISPIEL EINES GEMÜSEHÄNDLERS	58
6.4.2 PROBLEMSTELLUNG AUS EINEM INDUSTRIEBETRIEB	61
6.4.3 QUINTESSENZ	63
6.5 PERFEKTE INFORMATION UND DEREN WERT	64

6.6 VERHALTENSÄNDERUNG UND UNSICHERHEIT	64
6.6.1 AUSGANGSLAGE UND FRAGESTELLUNG	64
6.6.2 DARSTELLUNG DER AUSGANGSLAGE IN EINER ERGEBNISTABELLE	65
6.6.3 LÖSUNGSANSÄTZE	66
6.6.4 STRATEGIE-ENTSCHEID / BEANTWORTUNG DER FRAGESTELLUNG	67
6.6.5 VERHALTENSÄNDERUNG DES HOTELBESITZERS	67
6.7 QUINTESSENZ	67
6.8 REPETITIONSFRAGEN	68
6.8.1 TERRAMARE AG	68
6.8.2 VENTILKOLBEN-UNTERNEHMEN	69
<u>7 DISKRETE UND STETIGE ZUFALLSVERTEILUNGEN</u>	<u>70</u>
7.1 DISKRETE ZUFALLSVERTEILUNGEN	70
7.1.1 EINFÜHRENDES BEISPIEL	70
7.1.2 ZWEI TYPEN VON ZUFALLSVERTEILUNGEN	71
7.1.3 ARITHMETISCHES MITTEL, STANDARDABWEICHUNG UND VARIANZ EINER ZUFALLSVERTEILUNG	72
7.1.4 BINOMIALVERTEILUNG	72
7.1.5 HYPERGEOMETRISCHE ZUFALLSVERTEILUNG	76
7.1.6 POISSONVERTEILUNG	78
7.2 STETIGE ZUFALLSVERTEILUNGEN	80
7.2.1 (STANDARD-)NORMALVERTEILUNG	80
7.2.2 T-VERTEILUNG	85
7.2.3 CHIQUADRATVERTEILUNG	87
7.2.4 F-VERTEILUNG	91
7.3 REPETITIONSFRAGEN	93
7.3.1 LEBENSDAUER EINES BATTERIETYPIS	93
7.3.2 ANZAHL 'ÜBERLEBENSTAGE' EINER INSEKTENART UNTER LABORBEDINGUNGEN	93
7.3.3 KLUB DER BESTEN	93
7.3.4 ALTE VERARBEITUNGSMASCHINE	94
7.3.5 BIG BATH ACCOUNTING	94
<u>8 STICHPROBENTHEORIE UND STICHPROBENVERTEILUNGEN</u>	<u>95</u>
8.1 GRÜNDE ZUR STICHPROBENERFASSUNG	96
8.2 METHODEN DER STRICHPROBENGWINNUNG	96
8.2.1 EINFACHE ZUFALLSSTICHPROBE	97
8.2.2 SYSTEMATISCHE ZUFALLSSTICHPROBE	97
8.2.3 KLUMPENZUFALLSSTICHPROBE	97
8.3 ZENTRALER GRENZWERTSATZ	98
8.4 STICHPROBENVERTEILUNG UND KONFIDENZ- BZW. VERTRAUENSINTERVALLE	101
8.5 BESTIMMUNG DES 'OPTIMALEN' STICHPROBENUMFANGS	105
8.6 REPETITIONSFRAGEN	107
8.6.1 BESTIMMUNG DES VERTRAUENSINTERVALLS DES TATSÄCHLICHEN, DURCHSCHNITTLICHEN VITAMINGEHALTS EINER BESTIMMTEN SPEISE	107
8.6.2 AUTOMAT ZUR HERSTELLUNG VON METALLTEILEN	107
8.6.3 BESTIMMUNG DES VERTRAUENSINTERVALLS DES TATSÄCHLICHEN, DURCHSCHNITTLICHEN MILLILITER-INHALTS VON 3.5 DL SOFT-DRINK-FLASCHEN	108

9	HYPOTHESENTESTS	109
9.1	HYPOTHESE UND HYPOTHESENTEST	109
9.2	FÜNF SCHRITTE DES HYPOTHESENTESTS	110
9.3	EIN- UND ZWEISEITIGE SIGNIFIKANZTESTS	113
9.4	FEHLER DES TYPUS I UND TYPUS II	114
9.5	BEISPIEL EINES HYPOTHESENTESTS	115
9.6	BEDEUTUNG DES P-WERTS	116
9.7	REPETITIONSFRAGEN	117
9.7.1	AUSSCHUSS-ANTEIL GUT UND SCHLECHT EINGESTELLTER MASCHINE	117
9.7.2	'TEST' ÜBER BESSERES MANAGEMENT	117
9.7.3	INDUSTRIE-TEPPICH	118
10	REGRESSION UND KORRELATION	119
10.1	KORRELATIONS-ANALYSE	120
10.2	LINEARITÄTSANNAHME DER REGRESSIONSFUNKTION	122
10.3	KENNZAHLEN DER KORRELATION	123
10.3.1	KORRELATIONSKOEFFIZIENT	123
10.3.2	HYPOTHESENTEST BEZÜGLICH KORRELATIONSKOEFFIZIENT	124
10.3.3	DETERMINATIONSKOEFFIZIENT	124
10.4	PRAKTISCHES BEISPIEL	126
10.5	URSACHE-WIRKUNGS-ZUSAMMENHANG - KRITISCHE HINTERFRAGUNG	127
10.6	REGRESSIONS-ANALYSE	128
10.6.1	METHODE DER KLEINSTEN QUADRATE	128
10.6.2	STANDARDFEHLER DER SCHÄTZUNG	130
10.6.3	WEITERE ANNAHMEN DER LINEAREN REGRESSIONSFUNKTION	131
10.6.4	DREI WICHTIGE TESTS BEZÜGLICH DER UNTERSTELLTEN ANNAHMEN	131
10.6.5	VERTRAUENSINTERVALL DER PARAMETER DER REGRESSIONSGERADEN SOWIE PROGNOSE-INTERVALL	132
10.6.6	HYPOTHESENTEST BEZÜGLICH DEM 'WAHREN' ACHSENABSCHNITT BZW. DER 'WAHREN' STEIGUNG (DER GRUNDGESAMTHEIT)	134
10.6.7	ERWEITERUNG DES PRAKTISCHEN BEISPIELS	135
10.7	MULTIPLE REGRESSIONS-ANALYSE	137
10.8	SCHEMATISCHE VORGEHENSWEISE BEI (MULTIPLER) REGRESSIONS-ANALYSE	142
10.9	REPETITIONSFRAGEN	143
10.9.1	PROBLEMSTELLUNG AUS DER KOSTENRECHNUNG	143
10.9.2	PROBLEMSTELLUNG AUS DEM ABSATZBEREICH	143
10.9.3	ZUSAMMENHANG VON REPARATURKOSTEN UND ALTER BEI PKW'S	144
10.9.4	ZUSAMMENHANG WERBEAUFWAND UND ABSATZ	145
10.9.5	CAPM	146
10.9.6	KUNDENAUFTRAG	148
11	ZEITREIHENANALYSE UND PROGNOSE	149
11.1	'KLASSISCHE' ZEITREIHENZERLEGUNG	149
11.1.1	ZEITREIHENMODELLE	149
11.1.2	METHODE DER GLEITENDEN DURCHSCHNITTE	151
11.1.3	VORGEHENSWEISE BEI DER BERECHNUNG DER ZEITREIHENKOMPONENTEN	152
11.1.4	BEISPIEL: UMSATZENTWICKLUNG INDUSTRIE-UNTERNEHMEN	153

11.2 WEITERE ZEITREIHENANALYSE-MODELLE	159
11.2.1 EXPONENTIELLES GLÄTTEN	159
11.2.2 ARIMA-BOX-JENKINS-MODELL	164
11.3 REPETITIONSFRAGEN	173
11.3.1 UMSATZENTWICKLUNG EINES KÄSEPRODUZENTEN	173
11.3.2 UMSATZENTWICKLUNG EINES UNTERNEHMENS IN SPANIEN	173
12 LÖSUNGEN ZU REPETITIONSFRAGEN	174
12.1 AUFGABE ZU HÄUFIGKEITSVERTEILUNG	174
12.1.1 FAHRKILOMETER EINER PKW-FLOTTE (SEITE 11)	174
12.2 AUFGABEN ZU GRAFISCHE DARSTELLUNGEN	175
12.2.1 GESCHWINDIGKEITSMESSUNGEN (SEITE 17)	175
12.2.2 FARBPREFERENZEN VON AUTOKÄUFERN (SEITE 17)	176
12.2.3 ZIVILSTAND IN DEN USA (SEITE 17)	178
12.2.4 KARTOFFEL-ERNTE (SEITE 18)	179
12.3 AUFGABEN ZU INDEXZAHLEN	180
12.3.1 KONZERNUMSATZ-ENTWICKLUNG (SEITE 29)	180
12.3.2 AUSWIRKUNG DER INFLATION AUF DIE ERFOLGSRECHNUNG EINES UNTERNEHMENS (SEITE 30)	181
12.3.3 PREIS- UND MENGENENTWICKLUNG EINES SCHNELLIMBISSRESTAURANTS IN ZÜRICH (SEITE 30)	182
12.3.4 EINKAUF- UND VERKAUFSPREISENTWICKLUNG EINES HANDELSUNTERNEHMENS (SEITE 31)	182
12.4 AUFGABEN ZU MITTELWERTE UND KENNZAHLEN DER STREUUNG	184
12.4.1 ANZAHL DEFEKTER TEILE (SEITE 48)	184
12.4.2 EINKAUF- UND VERKAUFSPREISE (SEITE 48)	185
12.4.3 FAHRKILOMETER EINER PKW-FLOTTE (SEITE 49)	186
12.4.4 ANZAHL ARBEITSUNFÄLLE IN EINEM UNTERNEHMEN (SEITE 49)	187
12.5 AUFGABEN ZU WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG	188
12.5.1 TERRAMARE AG (SEITE 68)	188
12.5.2 VENTILKOLBEN-UNTERNEHMEN (SEITE 69)	189
12.6 AUFGABEN ZU STETIGE ZUFALLSVERTEILUNGEN	190
12.6.1 LEBENSDAUER EINES BATTERIETyps (SEITE 93)	190
12.6.2 ANZAHL 'ÜBERLEBENSTAGE' EINER INSEKTENART UNTER LABORBEDINGUNGEN (SEITE 93)	191
12.6.3 KLUB DER BESTEN (SEITE 93)	192
12.6.4 ALTE VERARBEITUNGSMASCHINE (SEITE 94)	193
12.6.5 BIG BATH ACCOUNTING (SEITE 94)	194
12.7 AUFGABEN ZU STICHPROBENTHEORIE UND STICHPROBENVERTEILUNGEN	195
12.7.1 BESTIMMUNG DES VERTRAUENSINTERVALLS DES TATSÄCHLICHEN, DURCHSCHNITTLICHEN VITAMINGEHALTS EINER BESTIMMTEN SPEISE (SEITE 107)	195
12.7.2 AUTOMAT ZUR HERSTELLUNG VON METALLTEILEN (SEITE 107)	196
12.7.3 BESTIMMUNG DES VERTRAUENSINTERVALLS DES TATSÄCHLICHEN, DURCHSCHNITTLICHEN MILLILITER-INHALTS VON 3.5 DL SOFT-DRINK-FLASCHEN (SEITE 108)	197
12.8 AUFGABEN ZU HYPOTHESENTESTS	198
12.8.1 AUSSCHUSS-ANTEIL GUT UND SCHLECHT EINGESTELLTER MASCHINE (SEITE 117)	198
12.8.2 'TEST' ÜBER BESSERES MANAGEMENT (SEITE 117)	200
12.8.3 INDUSTRIE-TEPPICH (SEITE 118)	201

12.9 AUFGABEN ZU REGRESSION UND KORRELATION	203
12.9.1 PROBLEMSTELLUNG AUS DER KOSTENRECHNUNG (SEITE 143)	203
12.9.2 PROBLEMSTELLUNG AUS DEM ABSATZBEREICH (SEITE 143)	204
12.9.3 ZUSAMMENHANG VON REPARATURKOSTEN UND ALTER BEI PKW's (SEITE 144)	205
12.9.4 ZUSAMMENHANG WERBEAUFWAND UND ABSATZ (SEITE 145)	206
12.9.5 CAPM (SEITE 146)	207
12.9.6 KUNDENAUFTRAG (SEITE 148)	209
12.10 AUFGABEN ZU 'KLASSISCHE' ZEITREIHENZERLEGUNG	210
12.10.1 UMSATZENTWICKLUNG EINES KÄSEPRODUZENTEN (SEITE 173)	210
12.10.2 UMSATZENTWICKLUNG EINES UNTERNEHMENS IN SPANIEN (SEITE 173)	211
<u>TABELLEN-SAMMLUNG (DISKRETE UND STETIGE ZUFALLSVERTEILUNGEN)</u>	<u>212</u>
<u>THEORETISCHE ARIMA-MODELLE UND DEREN ACF- UND PACF-DIAGRAMME</u>	<u>219</u>
<u>FORMELSAMMLUNG</u>	<u>220</u>
<u>ABBILDUNGS- UND TABELLENVERZEICHNIS</u>	<u>233</u>
<u>FACHWÖRTER DEUTSCH - ENGLISCH</u>	<u>236</u>
<u>FACHWÖRTER ENGLISCH - DEUTSCH</u>	<u>240</u>
<u>GLOSSAR</u>	<u>244</u>
<u>LITERATURVERZEICHNIS</u>	<u>254</u>
<u>ANGABEN ZUM AUTOR</u>	<u>256</u>

Vorwort

Das Buch 'Business-Statistik' richtet sich einerseits an Praktiker, die sich auf dem Gebiet der Statistik weiter-bilden bzw. ihr vorhandenes Wissen erweitern und aktualisieren wollen, und andererseits an Berufstätige, die sich auf eine Höhere Fachprüfung vorbereiten. Anhand von konkreten praktischen Anwendungen werden die heute gängigen statistischen Theorien und Methoden anschaulich vorgestellt und erläutert; auf mathematische Beweise und Herleitungen wird bewusst verzichtet.

Wie jedes Buch hat auch dieses seine 'Entstehungsgeschichte': Meine erste 'Auseinandersetzung' mit dem Gebiet der Statistik begann vor rund vierzig Jahren. Die Assistenten am Handelswissenschaftlichen Seminar der Universität Zürich, unter der damaligen Leitung von Prof. Dr. Paul Weilenmann, wurden ermutigt, sich möglichst 'interdisziplinär' zu beschäftigen. So war es denn auch nicht sonderlich erstaunlich, dass ich meine erste Kursleitertätigkeit in Betriebsstatistik an der Führungsschule Zürich ausübte. Obwohl als Betriebswirtschaftler nicht für Statistik 'prädestiniert', gab mir in der Folge Prof. Dr. Peter Bohley die Chance, als Lehrbeauftragter für Übungen Statistik I und II an der Universität Zürich meine Kenntnisse auf dem Gebiet der Statistik weiter zu vertiefen.

Während meiner Tätigkeit in der Wirtschaftspraxis als Controller, Gruppen-Controller, operativer Finanzchef und Berater konnte ich immer wieder meine erworbenen Statistik-Kenntnisse zur Verbesserung und Verdeutlichung von Entscheidungsunterlagen einsetzen.

Vor rund zwanzig Jahren wurde ich auf das Programm der Chartered Financial Analyst des CFA Institute aufmerksam gemacht. Wie ich sofort feststellen konnte, hatten sich die Statistikkenntnisanforderungen bei dieser Höheren Fachprüfung gegenüber meiner Assistenten-Zeit stark verändert: 'Mathematische Beweise' waren nicht mehr gefragt, statistische Theorien und Methoden waren völlig auf Praxis-Anwendungen fokussiert. Zudem hatte sich durch die Computer-Möglichkeiten das Spektrum der Statistik stark vergrößert: Was früher rechnerisch gar nicht möglich war, wurde ein Leichtes.

Leider musste ich feststellen, dass es im deutschsprachigen Raum kaum ein Lehrmittel auf dem Gebiet der Statistik gab, welches diesen modernen Anforderungen (z. B. für eine Höhere Fachprüfung) entsprach. Aufgrund meiner 'Vergangenheit' war es deshalb naheliegend, im Jahre 2003 die erste Auflage dieses Buches zu schreiben, welches bei der Compendio Bildungsmedien AG, Zürich, veröffentlicht wurde. Das Buch ist heute vergriffen. Aufgrund der weiterhin grossen Nachfrage und dem vielseitigen positiven Feedback habe ich mich entschlossen, das Buch zu überarbeiten und die vorliegende zweite, leicht überarbeitete Auflage zu verfassen. Dabei wurden bekannte Fehler korrigiert und – wie so üblich – sicherlich neue geschaffen, wofür ich mich im Voraus entschuldige.

Oscar A. G. Treyer

August 2024

1 EINFÜHRUNG

Vor mehr als hundert Jahren machte H. G. Wells, ein englischer Autor und Historiker, die folgende Bemerkung: "Die statistische Denkweise wird für einen Staatsbürger eines Tages genauso wichtig sein wie das Lesen".

W. Edwards Deming, ein bekannter Statistiker und einer der bekanntesten Begründer des Qualitätsmanagements, vertrat die Meinung, dass der Statistik-Unterricht vor der High School beginnen sollte. Die beiden Meinungen zeigen deutlich, dass Statistik eine wesentliche Rolle in unserem Leben spielt, auch wenn man sich dessen nicht immer voll bewusst ist.

Zuerst soll der Begriff 'Statistik' und weitere Grundbegriffe und deren Bedeutung erläutert werden, wobei in den Fussnoten die üblichen englischen Ausdrücke aufgeführt sind. Anschliessend wird auf die unter dem Begriff 'Statistik' bekannten Theorien und Methoden eingegangen.

1.1 Was bedeutet 'Statistik'

Unter 'Statistik'¹ versteht man die **Wissenschaft des Sammelns bzw. Zusammentragens², Organisierens, Darstellens³, Analysierens und Interpretierens von Daten als Hilfsmittel, um wirksamere⁴ Entscheidungen treffen zu können.**⁵

Wie die Definition besagt, beginnt die Untersuchung eines Problems mit dem Sammeln bzw. Zusammentragen von relevanten Daten. Erst wenn diese Daten in irgendeiner Form organisiert und allenfalls dargestellt werden, ist eine Analyse und Interpretation derselben möglich.

Im Gegensatz zum Begriff 'Daten' setzt der Begriff 'Information' voraus, dass die Daten auch entscheidungsrelevant sein müssen.

1.2 Arten von Statistik

Grundsätzlich gibt es zwei Arten von Statistik, nämlich die **deskriptive** und die **induktive**.

Die deskriptive bzw. beschreibende Statistik befasst sich mit den Methoden des informativen Organisierens, Zusammenfassens und Darstellens von Daten. Es geht hier also lediglich darum, die Daten sinnvoll zu ordnen und zu präsentieren, nicht aber darum, 'Rückschlüsse' zu ziehen.

Im Gegensatz dazu befasst sich die induktive bzw. schliessende Statistik mit den Methoden, die verwendet werden, damit etwas über die Grundgesamtheit aufgrund einer Stichprobe herausgefunden werden kann. Dabei bedeutet Grundgesamtheit⁶ die Sammlung aller möglichen Individuen, Objekte oder Messungen über ein Interessensgebiet. Die Stichprobe⁷ ist ein (An-)Teil der Grundgesamtheit.

1.3 Arten, Messung und Gewinnung

1.3.1 Arten

Es gibt grundsätzlich zwei Arten von Daten, nämlich solche die von einer **qualitativen** Grundgesamtheit und solche, die von einer **quantitativen** Grundgesamtheit entnommen werden.

Wenn immer das charakteristische Merkmal nicht-numerisch ist, dann bezeichnet man dies als qualitativ; wenn immer das charakteristische Merkmal numerisch erfasst werden kann, dann bezeichnet man dies als quantitative Daten.

¹ statistics

² collecting

³ presenting

⁴ more effective

⁵ nach MASON, LIND, MARCHAL, 1967, ¹⁰2000, S. 3.

⁶ population

⁷ sample

Quantitative bzw. numerische Daten bzw. Merkmalsausprägungen können sowohl **diskret**⁸ oder **stetig**⁹ sein.

Diskrete Daten können nur **gewisse Werte annehmen** und weisen normalerweise 'Lücken' zwischen den Werten auf. Beispiele für diskrete Daten: Anzahl Betten in einem Hotel, Anzahl Kursteilnehmer, usw. Diskrete Merkmalsausprägungen sind typischerweise das Resultat einer Zählung.

Stetige Daten können **jeden Wert** innerhalb eines gewissen Bereiches annehmen. Beispiele für stetige Daten: Körpergrösse von Menschen, Gewicht einer Verpackungseinheit, Flugzeit von Kloten nach New York (Kennedy), usw. Stetige Merkmalsausprägungen sind typischerweise das Resultat einer Messung.

1.3.2 Niveau der Messung¹⁰

Daten können nach dem Niveau der Messung¹¹ klassifiziert werden. Das Niveau der Messung der Daten diktiert häufig die Berechnungen, die gemacht werden können, um die Daten zusammenzufassen und darzustellen, sowie die statistischen Tests, die durchgeführt werden können.

Es gibt grundsätzlich vier Niveaus der Messung (aufsteigend):

- Nominales Daten-Niveau¹²,
- Ordinales Daten-Niveau¹³,
- Daten-Niveau mit Intervall¹⁴,
- Daten-Niveau mit Verhältniswert¹⁵.

Beim **nominalen Daten-Niveau** können die Beobachtungen nur klassifiziert oder gezählt werden; eine Rangfolge ist aber nicht feststellbar. Beispiele für nominales Daten-Niveau: Auto-Farbe, Geschlecht, usw.

Wichtig dabei ist, dass eine Beobachtung nur einer der (Unterteilungs-)Kategorien zugeordnet werden kann, d.h. dass die (Unterteilungs-)Kategorien sich gegenseitig ausschliessen¹⁶, und es somit keine 'Überlappungen' unter den (Unterteilungs-)Kategorien gibt. Z.B. kann eine bestimmte Autofarbe nur einer Farbkategorie zugeordnet werden und nicht mehreren.

Weiter ist wichtig, dass eine Beobachtung einer (Unterteilungs-)Kategorie zugeordnet werden muss, d.h. dass eine vollständige¹⁷ Zuordnung erfolgt. Damit immer eine Zuordnung möglich ist, wird häufig z.B. eine Kategorie 'Übrige' geschaffen.

Das nächst höhere Daten-Niveau ist das **ordinale Daten-Niveau**. Dieses weist alle Eigenschaften des nominalen Daten-Niveaus auf, doch können die (Unterteilungs-)Kategorien zusätzlich auf- oder absteigend, entsprechend ihrer inhaltlichen Bedeutung, in einer Rangfolge angeordnet werden. Beispiele für ordinales Daten-Niveau: Kredit-Rating einer Bank, Unterrichtsbeurteilung, usw.

Das nächst höhere Daten-Niveau ist das **Daten-Niveau mit Intervall**. Dieses weist alle Eigenschaften des ordinalen Daten-Niveaus auf. Zusätzlich sind aber die Abstände zwischen den Merkmalsausprägungen gleichbleibend bzw. gleichbedeutend. Beispiele für Daten-Niveau mit Intervall: Temperaturangaben in Grad Celsius, usw. Im Gegensatz zum ordinalen Daten-Niveau, bei dem 'nur' eine Rangfolge festgestellt werden kann, werden beim Daten-Niveau mit Intervall die Merkmalsausprägungen zusätzlich durch ein 'metrisches' System, quantitativ charakterisiert.

⁸ discrete

⁹ continuous

¹⁰ nach MASON, LIND, MARCHAL, 1967, ¹⁰2000, S. 11ff.

¹¹ level of measurement

¹² nominal level data

¹³ ordinal level data

¹⁴ interval level data

¹⁵ ratio level data

¹⁶ mutually exclusive

¹⁷ exhaustive

Bei den Temperaturangaben sind z.B. zwei Grad Differenz immer gleichbedeutend: ob von 30 auf 32 Grad oder von 10 auf 12 Grad ausgegangen wird, die Differenz beträgt in beiden Fällen 2 Grad.

Das höchste Daten-Niveau ist das **Daten-Niveau mit Verhältniswert**. Dieses weist alle Eigenschaften des Daten-Niveaus mit Intervall aus. Zusätzlich hat aber die Merkmalsausprägung Null die Bedeutung des Nicht-Vorhanden-Seins und das Verhältnis zwischen zwei Merkmalsausprägungen ist bedeutungsvoll. Beispiele für Daten-Niveau mit Verhältniswert: Einkommen, Anzahl produzierte Einheiten, Gewicht, Grösse, usw.

An einem Beispiel sollen diese zwei zusätzlichen Eigenschaften verdeutlicht werden: Drei Investitionsobjekte haben die folgende Rendite: A = 0%, B = 5% und C = 10%. Von den drei Investitionsobjekten kann gesagt werden, dass A keine Rendite abwirft, und C die doppelte von B.

1.3.3 Datengewinnung

Numerische Daten sind das Rohmaterial von statistischen Untersuchungen. Der Zufluss relevanter und geeigneter Daten ist kein periodisch auftretendes Ereignis, sondern entsteht permanent und wird unternehmensintern, durch Medien und staatliche Organisationen in grosser Menge täglich zur Verfügung gestellt.

Je nach dem ob die Daten speziell für die momentane Untersuchung und von der die Untersuchung durchführenden Stelle gesammelt wurden, oder ob man sich auf bereits vorhandene Daten bei der Untersuchung stützt, wird auch von primären bzw. sekundären Daten gesprochen. Sekundäre Daten sind begreiflicherweise billiger bei der Bereitstellung, sie haben aber den Nachteil, dass nicht immer klar ist, wie die Daten ermittelt wurden. Dadurch besteht die Möglichkeit, dass trotz korrekter statistischer Analyse Fehlinterpretationen entstehen.

Viele Unternehmensabteilungen, speziell die Marketingabteilungen, entscheiden sich primäre Daten für ihre Untersuchungen zu sammeln, ohne abzuklären, ob nicht bereits vorhandenen Daten zur Beantwortung der Fragestellung genutzt werden können. Es ist deshalb von Vorteil, wenn man sich neben der genauen Formulierung des Problems und der Ablaufplanung genügend Zeit nimmt, um gründlich abzuklären, wie die Gewinnung des Zahlenmaterials erfolgen soll und sicherzustellen, dass - wenn immer möglich - bereits vorhandenes Zahlenmaterial benutzt wird. Würde dieses Vorgehen in jedem Unternehmen besser befolgt, wäre es z.B. nicht möglich, dass unterschiedliche Abteilungen, unterschiedliche Umsatzzahlen verwenden.

Die Aufgabe des Statistikers besteht darin, korrekte Messungen durchzuführen, Problemstellungen in Form von Zahlen auszudrücken und den Grundstein für logische Schlussfolgerung zu legen. Diese Faktenfindung ersetzt nicht das eigene Urteilsvermögen, sondern ergänzt es. Meist ist hier auch der Punkt, wo die durch die Problemstellung betroffene Person mit dem Statistiker nicht mehr einer Meinung ist. Die Interpretation der Daten wird mitunter geprägt von den eigenen Wertvorstellungen und Interessen.

Es sollte daher immer klar unterschieden werden, ob es sich um die Faktenfindung der Statistik handelt, welche sich wissenschaftlichen Regeln zu unterwerfen hat, oder ob es sich um die Interpretation der Statistik handelt, die diesen Anspruch nicht für sich in Anspruch nehmen kann. Immer wenn die beiden Prozesse miteinander vermischt werden, kann es zu einer Geringschätzung der Statistik führen.

1.4 Tabellen¹⁸

Eine **geordnete Datensammlung** wird auch als (statistische) Tabelle¹⁹ bezeichnet und ist die grundlegende statistische Wiedergabeform. Sie ist grundsätzlich der Ursprung für alle weiteren Darstellungsformen (siehe Abschnitt 3) und sollte deshalb immer erstellt werden.

Die statistische Tabelle hat verschiedene Bausteine, welche nachfolgend kurz beschrieben werden:

- Zu jeder Tabelle gehört eine **Überschrift**, die in Kürze angibt, worum es sich bei den wiedergegebenen Zahlen handelt.

¹⁸ siehe auch BOHLEY, ⁶1996, S. 66ff.

¹⁹ table

- Die **Tabellenzellen** bestehen meistens aus **Zahlen**.
- Der **Zeitpunkt bzw. Zeitraum**, auf den sich die Zahlen beziehen, muss in der Tabelle **deutlich angegeben** werden.
- Die **Einheit und die Dimension der Einheit** der Zahlen muss auch **klar** in der Tabelle **ersichtlich** sein (z.B. Tausend und m^2).
- Falls die Zahlen eines **zusätzlichen Kommentars** bedürfen, ist dieser in einer **Fussnote anzugeben**.
- Zu jeder Tabelle gehört auch eine **Quellenangabe bzw. die Herkunft aller Zahlen** ist zu dokumentieren.
- Falls notwendig ist eine **genaue Definition bzw. Literaturstellen** mit den entsprechenden Definitionen der Zahlen anzugeben.
- Nebst Zahlen enthält die Tabelle auch häufig '**Symbole**'. Z.B.
 - '-' steht für 'nichts vorhanden',
 - '0' oder '0.0' steht für einen Wert, der (gerundet) kleiner ist als der angegebene Wert (z.B. 0.3 oder 0.049),
 - '...' oder '*' steht für 'die Angabe fällt später an',
 - 'n.a.' steht für 'nicht anwendbar' bzw. 'not applicable'.
 Die Verwendung der Symbole ist nicht einheitlich geregelt, weshalb immer das Abkürzungsverzeichnis konsultiert werden sollte.
- Die **Spalten²⁰ und Zeilen²¹** in einer Tabelle sollten **verständlich bezeichnet** werden.
- **Summen und Kennzahlen** sind speziell **hervorzuheben**. Dabei ist zu beachten, dass die Summen manchmal aufgrund von Rundungsdifferenzen nicht der Summe der angegebenen Zahlen entsprechen. Wenn dies der Fall ist, sollte auf diese Tatsache speziell hingewiesen werden.

1.5 Nutzen und Missbrauch der Statistik²²

Ein bekanntes Sprichwort, das dem englischen Staatsmann und Schriftsteller des 19. Jahrhunderts, Benjamin Disraeli, zugeschrieben wird, besagt, dass es Lügen, verdammte Lügen und Statistiken gibt. Zudem gibt es auch noch den Spruch: Zahlen lügen nicht, doch Lügner spielen mit den Zahlen (figures don't lie, liars figure). Beide Aussagen beziehen sich auf den Missbrauch der Statistik, bei der Daten in einer irreführenden Art und Weise dargestellt werden.

In der Folge werden ein paar Möglichkeiten des Missbrauchs der Statistik aufgeführt.

- **Ein Durchschnitt repräsentiert nicht immer die Charakteristik aller Daten:**
 Mit dem Begriff 'Durchschnitt' bezieht man sich auf diverse Kennzahlen von Mittelwerten. Normalerweise geht man davon aus, dass die Merkmalsausprägungen zusammengezählt und durch die Anzahl Vorkommnisse dividiert werden. Wenn also ein Liegenschaftenverkäufer sagt, dass der durchschnittliche Verkaufspreis von Einfamilienhäusern in der Gegend CHF 900'000.00 beträgt, dann denkt der Zuhörer, dass die CHF 900'000.00 ein repräsentativer Verkaufspreis aller Häuser in der Gegend darstellt. Angenommen in der Gegend wären fünf Einfamilienhäuser zu folgenden Preisen verkauft worden: CHF 300'000.00, CHF 300'000.00, CHF 360'000.00, CHF 540'000.00, CHF 3'000'000.00. In diesem Fall wäre der durchschnittliche Verkaufspreis tatsächlich CHF 900'000.00, aber dieser Preis wäre kaum ein repräsentativer bzw. typischer Verkaufspreis.
 Mit diesem Beispiel soll gezeigt werden, dass mit Kennzahlen immer eine Reduktion des Informationsgehaltes einhergeht, und dass diese meist dann ausschliesslich benutzt werden, wenn sich dadurch die eigene Position verbessert.

²⁰ columns

²¹ rows

²² siehe auch MASON, LIND, MARCHAL, 1967, ¹⁰2000, S. 15f. Zu diesem Thema wurde schon viel geschrieben. Ein einfach, interessant und witzig geschriebenes Buch ist z.B. BECK-BORNHOLDT, DUBBEN, 1998.

- **Grafische Darstellungen können dazu verwendet werden, den Leser visuell in die Irre zu führen:**

Angenommen die Steuerbelastung in einer Gemeinde sei auf das Doppelte gestiegen. Dies könnte z.B. wie folgt dargestellt werden:

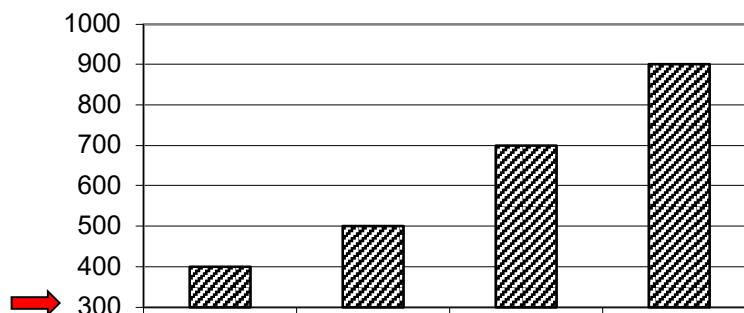
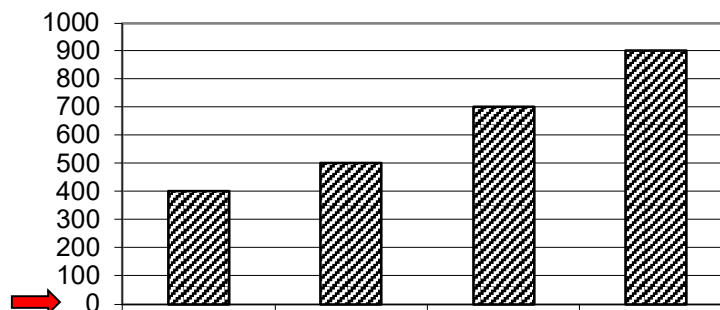
Abb. 1: Visuelle Irreführung bezgl. Grösse versus Fläche

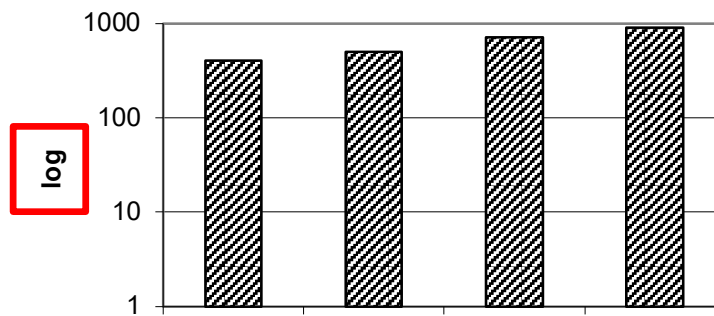


Bei dieser Darstellung des obigen Sachverhalts hat man das \$-Zeichen einfach doppelt so gross gezeichnet. Dabei hat man (vielleicht willentlich) übersehen, dass visuell eine Vervielfachung vorgenommen wurde. Ein wichtiger Grundsatz bei grafischen Darstellungen besteht darin, dass der 'Leser' der Darstellung visuell immer die Fläche sieht, nicht aber nur eine Dimension.

Eine weitere Möglichkeit, den Sachverhalt durch eine grafische Darstellung zu verzerren, besteht darin, die Werteskala erst ab einem gewissen Wert zu beginnen oder die Werteskala zu logarithmisieren. Die folgenden drei Darstellungen sollen dies verdeutlichen:

Abb. 2: Visuelle Irreführung bezgl. Werteskala





Bei der ersten Darstellung beginnt die Werteskala bei Null, bei der zweiten bei 350. Allein damit hat man erreicht, dass der Zuwachs der Zahlenreihe visuell für den 'Leser' viel stärker steigt. Durch Logarithmieren der Werteskala bei der dritten Darstellung wird hingegen der Zuwachs der Zahlenreihe drastisch 'entschärft'.

Sehr ähnliche Effekte erzielt man auch schon, indem man die Darstellung in die Höhe oder Breite 'zieht'.

- **Indem die Herkunft und der Umfang der Daten sowie die verwendeten statistischen Methoden verschwiegen werden, können 'Fehlinterpretationen' entstehen:**

Angenommen in einer Werbung werde behauptet, dass zwei von drei Ärzten ein bestimmtes Medikament befürworten. Der Trick bei dieser Behauptung besteht darin, dass jeder 'Normalbürger' denkt, dass 67% aller Ärzte dieses Medikament befürworten. Über die Frage, wie viele Ärzte effektiv befragt wurden und wie die Auswahl der befragten Ärzte erfolgte, wird aber in der Werbung keine Aussage gemacht.

- **Ein auf mehrere Kommastellen angegebener Wert ist nicht unbedingt aussagekräftiger als ein gerundeter Wert:**

Sehr häufig wird versucht, durch die Angabe vieler Kommastellen das 'Vertrauen' in einen Wert bzw. in die Statistik für den 'Leser' zu erhöhen, obwohl vielleicht gerade schon bei dem Zusammentragen der Daten nicht sehr genau vorgegangen wurde.

2 HÄUFIGKEITSVERTEILUNG

2.1 Erklärung am Beispiel

Wie bereits erwähnt, werden Methoden, die für die Beschreibung eines Daten-Sets verwendet werden, als deskriptive bzw. beschreibende Statistik bezeichnet. Anders ausgedrückt, verwendet man die deskriptive Statistik für das Organisieren der Daten mittels unterschiedlicher Mittel, um hervorzuheben, in welche Richtung die Daten-Werte sich konzentrieren, und um den grössten und kleinsten Wert zu eruieren.

Eine der wichtigsten Methoden zur Beschreibung eines Daten-Sets ist die Häufigkeitsverteilung, welche in diesem Kapitel exemplarisch anhand eines Beispiels erläutert wird.

Eine Häufigkeitsverteilung²³ entsteht dadurch, dass Daten in Kategorien²⁴ - auch Klassen oder Gruppen genannt - eingeteilt werden. Dadurch wird die Anzahl Beobachtungen in den sich gegenseitig ausschliessenden²⁵ Kategorien ersichtlich.

²⁶Die Aufzeichnung von Daten oder Beobachtungswerten in der gleichen Reihenfolge, wie sie ermittelt wurden, nennt man **Urliste**²⁷.

Abb. 3: Urliste Häufigkeitsverteilung

Ausschuss in Stück pro Arbeitstag einer Produktionskostenstelle

Woche	Montag	Dienstag	Mittwoch	Donnerstag	Freitag
1	12	6	11	13	8
2	6	7	8	9	9
3	8	10	9	10	11
4	10	4	11	11	10
5	8	10	11	10	15
6	5	9	10	8	11
7	11	8	12	9	10
8	8	11	7	12	9
9	7	9	10	10	9
10	9	10	7	9	10

Anhand dieser Urliste werden die Ursprungsdaten durch die folgenden vier Schritte prägnanter dargestellt. Man muss sich jedoch bewusst sein, dass durch das Zusammenfassen (ab 2. Schritt) auch ein gewisser Teil an Informationstiefe verloren geht.

²³ frequency distribution

²⁴ categories

²⁵ mutually exclusive

²⁶ siehe auch HUNZIKER, SCHEERER, ⁶1984, S. 60.

²⁷ raw material or ungrouped data

1. Schritt: Auf- oder absteigend ordnen

Die Daten der Urliste werden auf- oder absteigend geordnet und man erhält eine **Rangliste**.

Abb. 4: Rangliste Häufigkeitsverteilung, aufsteigend sortiert

Ausschuss in Stück pro Arbeitstag einer Produktionskostenstelle

4	8	9	10	11
5	8	9	10	11
6	8	9	10	11
6	8	9	10	11
7	8	9	10	11
7	9	10	10	12
7	9	10	10	12
7	9	10	11	12
8	9	10	11	13
8	9	10	11	15

2. Schritt: In Kategorien einteilen

Meist genügt aber für statistische Untersuchungen das bloße Ordnen des Urmaterials nach seiner Grösse nicht aus. Man möchte auch wissen, wie oft die gleichen Beobachtungswerte auftreten. Dadurch entsteht dann eine **Häufigkeits- oder Frequenztabelle**. Die Anzahl der Vorkommnisse kann sowohl in absoluten Zahlen (absolute Häufigkeit) oder in Relation zur Gesamtzahl der Vorkommnisse (relative Häufigkeit) ausgewiesen werden.

Abb. 5: Häufigkeits- oder Frequenztabelle

Ausschuss in Stück pro Arbeitstag einer Produktionskostenstelle:

Ausschuss in Stück pro Arbeitstag	absolute Häufigkeit	relative Häufigkeit
4	1	2%
5	1	2%
6	2	4%
7	4	8%
8	7	14%
9	10	20%
10	12	24%
11	8	16%
12	3	6%
13	1	2%
15	1	2%

3. Schritt: Wenn nötig, in Kategorien zusammenfassen

Ist die Anzahl gleicher Beobachtungswerte zu umfangreich oder soll die Aussage noch weiter abstrahiert werden, muss die ungruppierte bzw. nicht klassierte Häufigkeitsverteilung noch weiter komprimiert werden. Dies geschieht durch **Zusammenfassen der Beobachtungswerte in 'Kategorien'** - auch 'Klassen' oder 'Gruppen' genannt.

Für die Wahl der Anzahl von Kategorien geht man generell davon aus, dass nicht weniger als 5 und nicht mehr als 15 Klassen gebildet werden sollen. Dabei ist immer zu beachten, dass mit einer zu grosszügigen Zusammenfassung unter Umständen wertvolle Informationen 'verloren' gehen können.

Die Kategorienintervalle²⁸ sind so gegeneinander abzugrenzen, dass die Zuordnung der Beobachtungswerte klar hervorgeht bzw. kein Beobachtungswert mehr als einer Kategorie angehört²⁹. Zudem ist zu beachten, dass die Kategorienintervalle gleich gross sind. Wird letzteres nicht befolgt, ist die Interpretation für den Entscheidungsträger äusserst schwierig; bei einer korrekten grafischen Darstellung (siehe Darstellung unter Schritt 4) sind auch entsprechende Korrekturen anzubringen. Wenn z.B. das Kategorienintervall bei einer Kategorie doppelt so gross ist wie bei den übrigen Kategorien, ist bei der visuellen Darstellung die Häufigkeit des Vorkommens bei diesem um die Hälfte zu reduzieren. Erst dadurch erreicht man die visuell bzw. flächenmässig korrekte Darstellung.

Zur Vereinfachung bzw. für eine weitere Komprimierung wird zudem davon ausgegangen, dass die Beobachtungswerte innerhalb der Kategorien gleichmässig verteilt sind, was erlaubt, dass die Kategorienmitte als Repräsentant der ganzen Kategorie betrachtet werden kann.

Wird wie oben beschrieben vorgegangen, erhält man eine **gruppierte Häufigkeitstabelle**.

Abb. 6: Gruppierte Häufigkeitstabelle

Ausschuss in Stück pro Arbeitstag einer Produktionskostenstelle:

Ausschuss in Stück pro Arbeitstag: Kategorien- Intervall	Kategorien- mitte	absolute Häufigkeit	relative Häufigkeit
2 - 4	3	1	2%
5 - 7	6	7	14%
8 - 10	9	29	58%
11 - 13	12	12	24%
14 - 16	15	1	2%

²⁸ class intervals

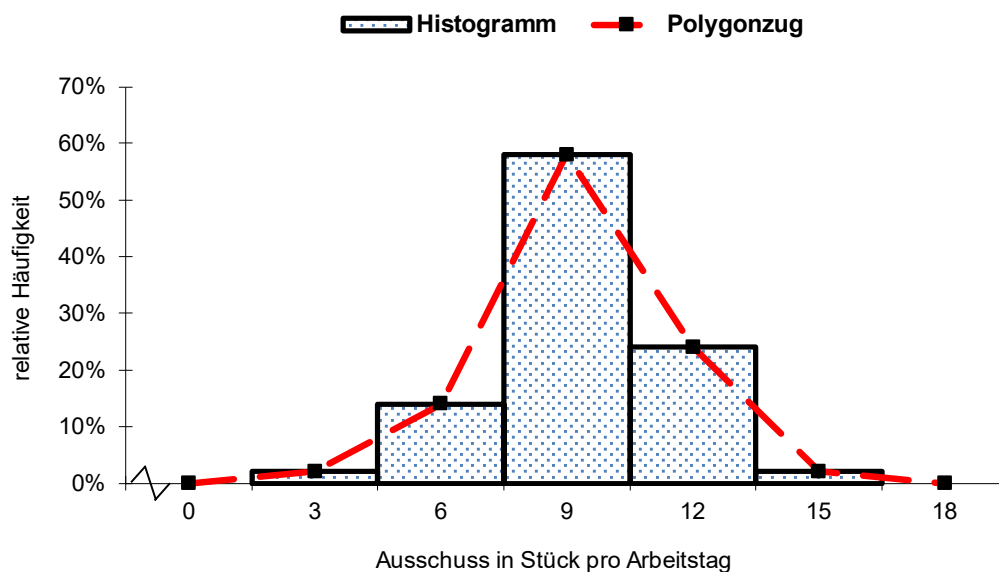
²⁹ mutually exclusive

4. Schritt: Grafische Darstellung

Soll die Häufigkeitsverteilung grafisch dargestellt werden, so sind auf der X-Achse (Abszisse) die Beobachtungswerte bzw. Kategorienmitten³⁰, auf der Y-Achse (Ordinate) die Häufigkeit ihres Vorkommens darzustellen. Werden die so erhaltenen Punkte im X-Y-Diagramm miteinander verbunden, entsteht ein **Häufigkeitspolygon** bzw. **Polygonzug**³¹; wird jeweils über die ganze Klassenbreite auf dem Niveau der Häufigkeit ihres Vorkommens eine horizontale Linie gezogen und verbindet man diese Linien zu einer 'Treppe' entsteht das **Histogramm**³².

Um eine visuelle bzw. flächenmässig korrekte Darstellung zu erreichen, ist **es wichtig, dass die Fläche unterhalb des Polygonzugs mit derjenigen innerhalb des Histogramms übereinstimmt**. Dies ist vor allem bei der ersten und letzten Klasse zu berücksichtigen.

Abb. 7: Histogramm und Polygonzug



³⁰ class midpoint

³¹ frequency polygon

³² histogram

2.2 Repetitionsfrage

2.2.1 Fahrkilometer einer PKW-Flotte³³

Die folgende Tabelle zeigt zusammengefasst die Anzahl Fahrkilometer (in 1'000 km), welche die PKW's einer 'Flotte' von 190 Stück gefahren sind, bevor die PKW's wegen eines grösseren Schadens repariert werden mussten.

Distanz (in 1'000 km)	Häufigkeit (absolut)
bis und mit 60	32
ab 60 bis und mit 80	25
ab 80 bis und mit 100	34
ab 100 bis und mit 120	46
ab 120 bis und mit 140	33
ab 140 bis und mit 220	20

Fragestellung

Zeichnen Sie ein Histogramm der relativen Häufigkeiten der Fahrkilometer und beschriften Sie sowohl die X- als auch die Y-Achse vollständig, so dass das Histogramm klar interpretiert werden kann.

³³ siehe auch UPTON, COOK, 1996, ²1997, S. 45.

3 GRAFISCHE DARSTELLUNGEN

Unter dem Motto 'ein Bild sagt mehr, als tausend Worte' sollen in der Folge die verschiedenen Möglichkeiten von grafischen Darstellungen kurz besprochen werden. Die Popularität von grafischen Darstellungen ist nicht erst seit dem PC-Zeitalter sehr gross. Bereits früher wurde erkannt, dass die grafische Darstellung eines Sachverhalts für den 'Normalbürger' viel einprägsamer ist, als die 'nackte' Auflistung von Zahlen. Dabei ist aber zu beachten, dass meistens grafische Darstellungen den (zahlenmässigen) Sachverhalt abstrahieren und dadurch der Informationsgehalt reduziert wird. Es gibt somit bei der Darstellung eines Sachverhalts eine Interdependenz zwischen der einprägsamen Visualisierung und der Vermittlung von detaillierten Daten. Die Aufgabe des Statistikers besteht somit darin, die beiden sich widersprechenden Anforderungen seriös gegeneinander abzuwägen.

Eine seriös erstellte grafische Darstellung³⁴ muss sicherstellen, dass der Sachverhalt nicht verzerrt wird. Eine der wichtigsten Voraussetzungen dazu besteht darin, dass der visuelle, flächenmässige Aspekt berücksichtigt wird (siehe die Ausführungen unter 2).

Nachfolgend werden die bekanntesten grafischen Darstellungs-Typen vorgestellt.

3.1 Stamm-und-Blatt-Diagramme

Das Stamm-und-Blatt-Diagramm³⁵ ist eines der einfachsten Möglichkeiten, numerische Daten zu veranschaulichen. Die numerischen Merkmalsausprägungen werden dabei **der Grösse nach geordnet und in einen Stamm- und einen Blattanteil zerlegt**. Gleiche numerische Merkmalsausprägungen werden nicht durch ihre Häufigkeit, sondern direkt wiedergegeben. Damit ist es möglich, auch die Verteilung innerhalb von Kategorien zu betrachten.

Anhand eines Beispiels soll die Vorgehensweise illustriert werden.

Die folgenden numerischen Messungen sind festgestellt und in einer Urliste aufgeführt worden:

Abb. 8: Urliste Stamm-und-Blatt-Diagramm

96	88	127	113	108	117
139	94	125	155	112	97
112	132	125	106	134	156
118	125	120	113	138	120
93	117	95	96	94	89
142	107	155	103	127	
135	111	104	139	119	
136	143	103	124	148	

Wird nun diese Urliste aufsteigend sortiert, ergibt sich folgendes Bild:

Abb. 9: Rangliste Stamm-und-Blatt-Diagramm, aufsteigend sortiert

88	97	112	120	132	143
89	103	112	120	134	148
93	103	113	124	135	155
94	104	113	125	136	155
94	106	117	125	138	156
95	107	117	125	139	
96	108	118	127	139	
96	111	119	127	142	

³⁴ grafic presentation

³⁵ stem-and-leaf display

Für ein Stamm-und-Blatt-Diagramm ist es nun noch notwendig, dass der Stamm- und Blattanteil definiert wird. Im obigen Beispiel sei der Blattanteil der letzte rechte Stellenwert der Merkmalsausprägungen und der Stammanteil alle die sich davor befindlichen Stellen.

Dies bedeutet, dass die z.B. für die beiden festgestellten Merkmalsausprägungen '127' der Blattanteil gleich dem Wert '7' entspricht und der Stammanteil dem Wert '12'. Da die Merkmalsausprägung '127' zwei Mal vorkommt, wird der Blattanteil von '7' auch zwei Mal nebeneinander im Stamm-und-Blatt-Diagramm aufgeführt (siehe hervorgehobene Teile im untenstehenden Diagramm).

Das Stamm-und-Blatt-Diagramm würde dann wie folgt aussehen³⁶:

Abb. 10: Tabelle Stamm-und-Blatt-Diagramm, ausgewertet

Frequency	Stem &	Leaf
2.00	8 .	89
7.00	9 .	3445667
6.00	10 .	334678
9.00	11 .	122337789
8.00	12 .	004555 77
7.00	13 .	2456899
3.00	14 .	238
3.00	15 .	556

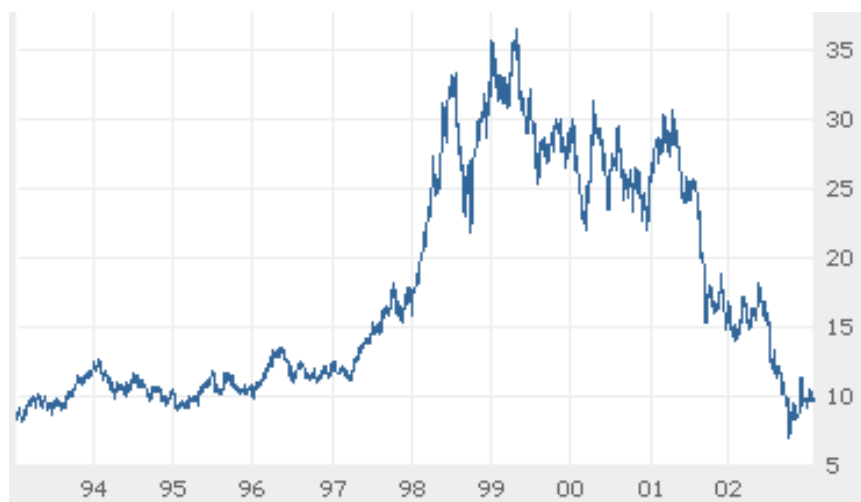
Stem width: 10.00
Each leaf: 1 case(s)

3.2 Linien-Diagramme

Linien-Diagramme³⁷ sind besonders geeignet, um den **Verlauf einer Variable visuell aufzuzeichnen**. Typischerweise werden die Werte der Variable (z.B. Anzahl verkaufter Einheiten, Verkaufserlös) auf der Y-Achse (Ordinate) und die entsprechende Zeitdimension auf der X-Achse (Abszisse) eingetragen.

Illustratives erstes Beispiel: Verlauf des täglichen Aktienkurses der letzten 10 Jahre eines Industrieunternehmens:

Abb. 11: Liniendiagramm Aktienkursverlauf

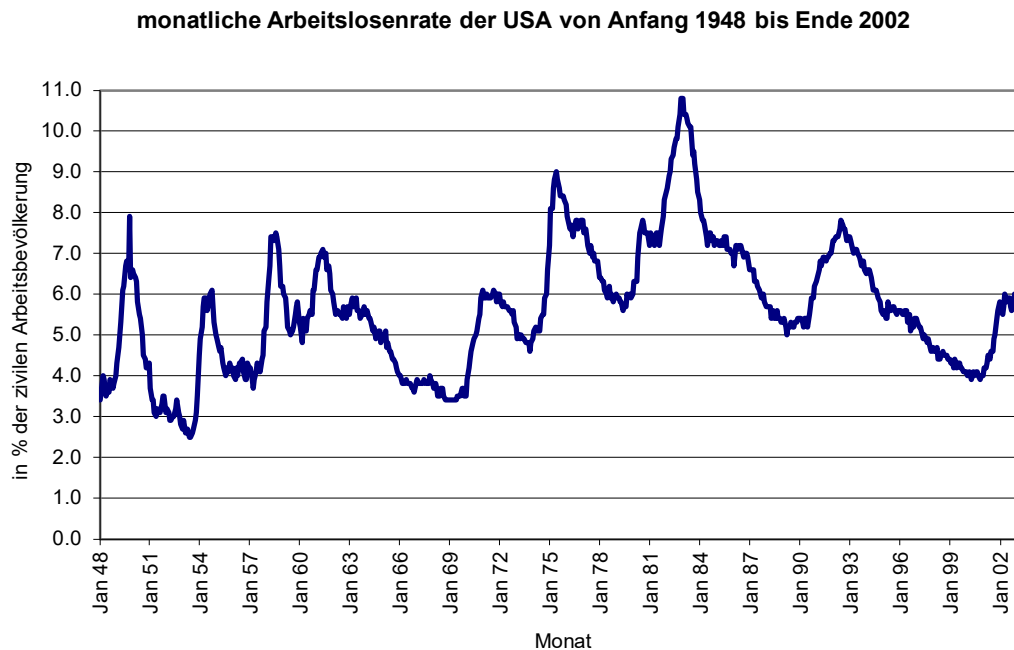


³⁶ Das Stamm-und-Blatt-Diagramm wurde mit der Statistik-Software 'SPSS for Windows' erstellt.

³⁷ line charts

Illustratives zweites Beispiel: Verlauf der monatlichen Arbeitslosenrate der USA zwischen Anfang 1948 und Ende 2002 (in Prozent der zivilen Arbeitsbevölkerung)³⁸:

Abb. 12: Liniendiagramm Entwicklung Arbeitslosenrate USA



Bei der Erstellung von Linien-Diagrammen (insbesondere bei der Verwendung einer Software) ist darauf zu achten, dass die Erfassung der Merkmalsausprägung mit gleich grossen Intervallabständen bezüglich Zeitdimension bzw. X-Achse erfolgt. Sind die Intervallabstände der Zeitdimension unterschiedlich, entstehen 'Lücken', die bei der Diagrammdarstellung berücksichtigt werden müssen. Bei Verwendung einer Software darf in diesem Fall nicht der 'einfache' Linien-Diagramm-Typ verwendet werden, sondern der Typ 'XY'.

3.3 Säulen- und Balken-Diagramme

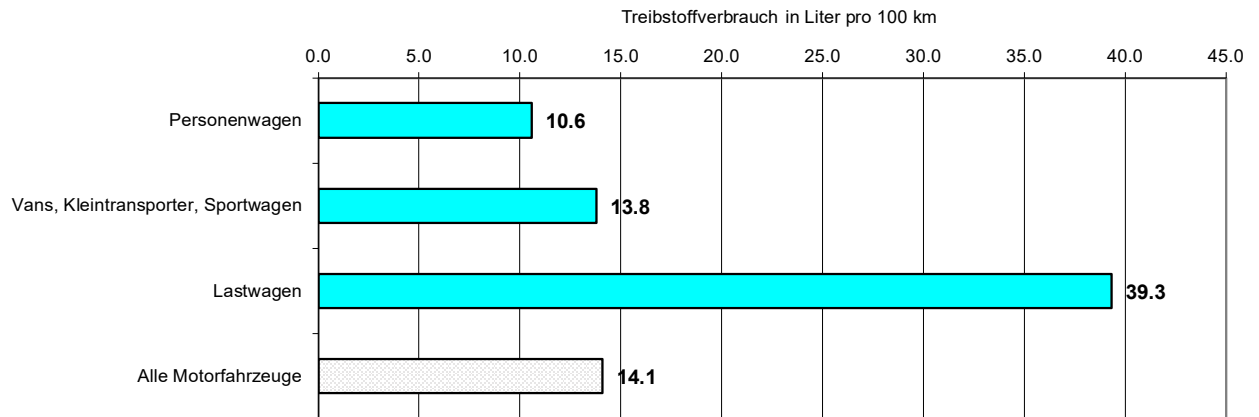
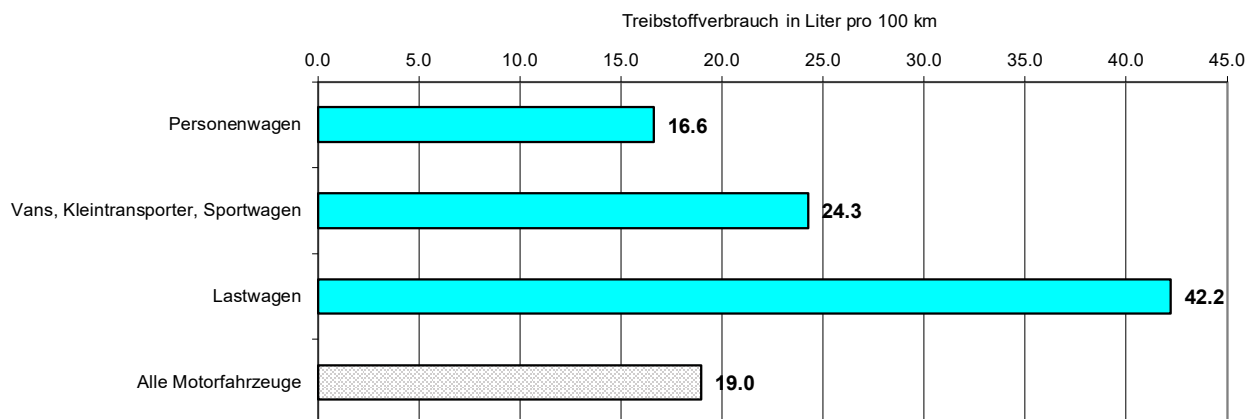
Säulen- und Balken-Diagramme³⁹ eignen sich besonders gut, um **visuell Daten von quantitativen Merkmalsausprägungen (Y-Achse bei Säulen-Diagramm) mit qualitativ sich unterscheidenden Merkmalen (X-Achse bei Säulen-Diagramm) gegenüberzustellen**. Um letzteres hervorzuheben, werden die verschiedenen Säulen bzw. Balken auch nicht aneinandergehängt, sondern werden voneinander abgesetzt. Dies zeigt sich auch darin, dass mit Säulen- und Balkendiagrammen, im Gegensatz zu Histogrammen und den Linien-Diagrammen, bei denen das Daten-Niveau 'mit Intervall' oder 'mit Verhältniswert' vorhanden sein muss, jede Art von Niveau der Messung zugelassen ist. Vielleicht ist dies auch der Grund, warum heutzutage so häufig Säulen- und Balkendiagramme anzutreffen sind.

Zur Illustration seien die folgenden Balken-Diagramme über den durchschnittlichen Treibstoffverbrauch der Motorfahrzeuge für das Jahr 1999 und 1966 in den USA aufgeführt:⁴⁰

³⁸ Im Gegensatz z.B. zu Statistik der Schweiz des Bundesamtes für Statistik [<http://www.statistik.admin.ch/>] können fast alle Statistik-Daten der USA via Internet [<http://www.fedstats.gov/>] kostenlos heruntergeladen werden. Die Quelle dieser Daten stammt vom 'U.S. Department of Labor; Bureau of Labor Statistics; Series ID: LFS21000000; vom 27.1.2003.'

³⁹ vertical and horizontal bar charts

⁴⁰ Daten-Quelle: 'Energy Information Administration; Annual Energy Review 2001; Table 2.9 Motor Vehicle Mileage, Fuel Consumption, and Fuel Rates, 1949-2000; vom 26.1.2003.'

Abb. 13: Balkendiagramm Motorfahrzeug-Treibstoffverbrauch USA**durchschnittlicher Treibstoffverbrauch der Motorfahrzeuge für das Jahr 1999 in den USA****durchschnittlicher Treibstoffverbrauch der Motorfahrzeuge für das Jahr 1966 in den USA**

3.4 Kreis-Diagramme

Kreis-Diagramme⁴¹ eignen sich besonders gut, um die **Gliederung einer Summe von Merkmals-trägern** darzustellen (bzw. für Daten mit nominalem Daten-Niveau), indem der Kreis in Sektoren aufgeteilt wird, die im Verhältnis zu den relativen Häufigkeiten der Untergliederungen stehen. Dabei ist zu beachten, dass die Summe der Merkmalsträger gleich 360° ist und somit z.B. eine relative Häufigkeit von 10% gleich einem Kreissektor von 36° entspricht.

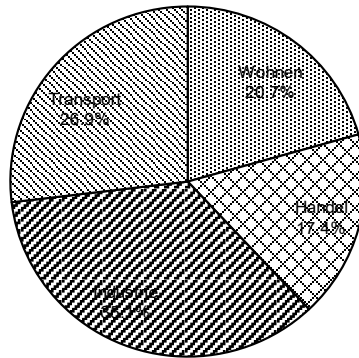
Zur Illustration sei das folgende Diagramm über den Energiekonsum nach Endverbraucher-Sektoren für das Jahr 2000 in den USA aufgeführt.⁴²

⁴¹ pie charts

⁴² Daten-Quelle: 'Energy Information Administration; Annual Energy Review 2001; Table 2.1a Energy Consumption by Sector, 1949-2001; vom 26.1.2003.'

Abb. 14: Kreisdiagramm Energiekonsum-Struktur USA

Energiekonsum nach Endverbraucher-Sektoren für das Jahr 2000 in den USA



Falls mehrere Kreis-Diagramme nebeneinander aufgeführt werden, ist zu beachten, dass die Flächen der Kreis-Diagramme im Verhältnis zu den jeweiligen Merkmalsträgersummen stehen müssen. Aus der Geometrie weiss man, dass die Fläche eines Kreises wie folgt berechnet wird:

$$\text{Kreisfläche} = \pi \cdot \text{Radius}^2$$

Daraus ist ersichtlich, dass sich die Flächen von Kreisen nicht proportional zu ihren Radien bzw. Durchmesser verhalten. Der Radienzusammenhang bei Kreisen ist viel mehr wie folgt:

$$\text{Radius 2. Kreis-Diagramm} = \text{Radius 1. Kreis-Diagrammes} \cdot \sqrt{\frac{\text{Merkmalsträgersumme 2. Kreis-Diagramm}}{\text{Merkmalsträgersumme 1. Kreis-Diagramm}}}$$

3.5 Weitere grafische Darstellungen

Es gibt eine unglaubliche Vielzahl weiterer Typen von grafischen Darstellungen. Jede Software 'brüht' sich mit neuen Formen. Sehr häufig kann damit aber der Sachverhalt nicht 'anschaulicher' dargestellt werden; ausser dem 'Überraschungseffekt' wird meist mehr Verwirrung geschaffen. Bei grafischen Darstellungen kann eigentlich nur empfohlen werden, möglichst einfache Darstellungstypen zu benutzen. Dadurch wird der Sachverhalt in den Vordergrund gestellt, was eigentlich das wahre Ziel sein sollte.

3.6 Repetitionsfragen

3.6.1 Geschwindigkeitsmessungen⁴³

Bei einer Probemessung eines Radargerätes wurden folgende Geschwindigkeiten in km/h von 30 Autos in einem Wohngebiet festgestellt.

45	51	50	52
46	49	50	54
48	52	51	54
48	57	51	55
48	50	51	52
49	51	51	55
50	52	51	
50	52	51	

3.6.2 Farbpräferenzen von Autokäufern

Ein Autoverkäufer interessiert sich für die Farbpräferenzen seiner Kunden. Für einen Autotyp stellt er folgende Präferenzen fest:

schwarz	weiss	rot	andere
12	23	16	18

3.6.3 Zivilstand in den USA⁴⁴

In der folgenden Tabelle ist der Familienstand der männlichen und weiblichen Bevölkerung (15 Jahre und darüber) der USA vom März 2000 aufgeführt.
[Quelle: U.S. Census Bureau]

Familien- stand	Männer	Frauen
	(in % der gesamten 15-jährigen und älteren Bevölkerung)	
ledig	31.3	25.1
verheiratet	56.1	52.3
verwitwet	2.5	10.0
geschieden / getrennt	10.1	12.6

Stellen Sie die obige Tabelle in Form eines oder mehrerer Kreisdiagramme dar, wobei angenommen werden kann, dass der Frauenanteil 60% betrage (Info: effektiv 51.8%).

⁴³ siehe auch UPTON, COOK, 1996, ²1997, S. 3+7.

⁴⁴ siehe auch SPIEGEL, 1961, ²1992, S. 32.

3.6.4 Kartoffel-Ernte

Nachstehend ist die Kartoffel-Ernte der Farm der Familie Müller für die Jahre 1990 bis 2000 in Tonnen aufgeführt. Für das Jahr 1996 sind leider keine Angaben vorhanden.

<u>Jahr</u>	<u>Kartoffel-Ernte in Tonnen</u>
2000	200
2001	185
2002	225
2003	250
2004	240
2005	195
2007	225
2008	250
2009	230
2010	235

Stellen Sie die Entwicklung der Kartoffel-Ernte möglichst sinnvoll graphisch dar.

4 INDEXZAHLEN⁴⁵

Ein Hauptproblem bei Darstellungen eines Sachverhalts besteht darin, dass sich der 'Normalbürger' sowohl unter den **Einheiten als auch unter der Dimension der Einheiten** häufig nichts vorstellen kann. **Deshalb** bedient man sich für die Beschreibung oder Charakterisierung von Sachverhalten sehr oft der **Verhältniszahlen**, d.h. einer Masszahl, die durch Quotientenbildung entsteht. Es gibt drei Arten von Verhältniszahlen⁴⁶:

- **Gliederungszahl**: Eine Teilgrösse wird zu ihrer Gesamtgrösse in Beziehung gesetzt. Das Ergebnis ist eine Anteilsangabe oder 'Quote' bzw. 'Rate'. Z.B. Anteil des Anlagevermögens bezüglich der Aktiven, Anteil der Arbeitslosen bezüglich der Erwerbstätigen (Arbeitslosenquote), usw.
- **Beziehungszahlen**: Zwei wesensverschiedene, aber in sinnvollem Zusammenhang stehende Grössen werden in Beziehung gesetzt. Z.B. Gewinn bezüglich Eigenkapital (Eigenkapitalrendite), Anzahl Ärzte pro 1'000 Einwohner (Ärztendichte), usw.
- **Indexzahlen**: Zwei inhaltlich gleichartige, sich auf verschiedene Zeitpunkte oder verschiedene geographische Orte beziehende Grössen werden in Beziehung gesetzt. Z.B. Preisniveau 1999 im Verhältnis zum Preisniveau 1998, Steuerbelastung im Land A im Verhältnis zur Steuerbelastung im Land B, usw.

Auf die Gliederungs- und Beziehungszahlen wird nicht näher eingegangen, sondern lediglich auf Indexzahlen.

Eine Indexzahl ist **eine Zahl, welche die relative Veränderung** bezüglich Preis, Quantität oder Wert **von einer Periode zu einer anderen ausdrückt**.⁴⁷

Indexzahlen werden heute üblicherweise als Prozentzahlen ausgedrückt. Im Basiszeitpunkt beginnt eine Indexreihe daher mit 100 bzw. 100%, wobei die Bezeichnung % häufig weggelassen wird (siehe z.B. Kursangabe bei Obligationen).

4.1 Ungewogener Index

Ein **Elementarindex** bzw. **Einzelindex** zeigt lediglich die Entwicklung **eines Preises, einer Menge oder eines Wertes**. Damit ist es aber **schwierig, sich einen Überblick über eine Vielzahl von Preisen, Mengen oder Werten zu verschaffen**. Also versucht man anhand einer Zusammenfassung dieses Problem zu lösen. **Eine Möglichkeit** besteht nun darin, **einen ungewogenen Index**⁴⁸ **aus den Summen zu berechnen**. Eine weitere Methode, auf die hier nicht weiter eingegangen wird, bestünde darin, den Durchschnitt aus den Einzelindizes zu bilden (siehe dazu Kapitel 4.4).

⁴⁵ index numbers

⁴⁶ nach BOHLEY, ⁶1996, S. 29f.

⁴⁷ nach MASON, LIND, MARCHAL, 1967, ¹⁰2000, S. 611.

⁴⁸ simple aggregate index

Anhand eines Beispiels soll dies illustriert werden.

Abb. 15: Aktien-Portfeuille von Samula Waagener 2011 und 2015

Samuel Wagner besitzt Aktien von drei Gesellschaften. Weiter unten sind die Aktienkurse (Preise) und die Anzahl der Aktien (Mengen), die er besitzt, per Ende 2011 und 2015 aufgeführt.

Gesellschaft	Aktienkurs per Ende 2011 in CHF	Aktienkurs per Ende 2015 in CHF	Anzahl Aktien per Ende 2011 in Stück	Anzahl Aktien per Ende 2015 in Stück
A	0.50	0.60	320	340
B	1.20	0.90	110	130
C	0.85	1.00	230	250

In der Folge sollen nun die Einzelindizes der Aktienkurse (Preise) sowie der ungewogene Aktienkursindex bzw. Preisindex des Aktien-Portfeuille von Samuel Wagner berechnet werden, wobei das Jahr 2011 als Basis-Periode angenommen wird.

Ein **Preiseinzelindex** berechnet sich wie folgt:

$$\text{Preiseinzelindex} = \frac{\text{Preis}_{\text{Zeitpunkt } t}}{\text{Preis}_{\text{Basiszeitpunkt}}}$$

Ein **ungewogener Preisindex** berechnet sich daher wie folgt:

$$\text{ungewogener Preisindex} = \frac{\sum \text{Preise}_{\text{Zeitpunkt } t}}{\sum \text{Preise}_{\text{Basiszeitpunkt}}} \quad 49$$

Für das obige Beispiel ergibt dies für die Aktienkurse folgende Resultate:

Abb. 16: Ungewogener Index (2015) Aktien-Portfeuille von Samuel Wagner

Gesellschaft	Aktienkurs- einzel- indizes	ungewogener Aktienkurs- index
A	120.00	98.04
B	75.00	
C	117.65	

Der **ungewogene Index**⁵⁰ hat zwei wesentliche Nachteile:

- Obwohl dieser Index als 'ungewogen' bezeichnet wird, erfolgt trotzdem eine Gewichtung, nämlich - im obigen Beispiel - bezüglich der Aktienkurse bzw. Preise. Da der Aktienkurs der Gesellschaft B gesunken ist und dieser einen hohen Aktienkurs aufweist, ist der ungewogene Aktienkursindex auch unter 100.
- Der andere Nachteil besteht darin, dass der ungewogene Index von den Einheiten abhängt. Würde im obigen Beispiel der *Aktienkurs der Gesellschaft A in Rappen gemessen*, ergäbe sich ein ungewogener Aktienkursindex (2015) von 118.92 $[(60.00 + 0.90 + 1.00) / (50.00 + 1.20 + 0.85)]$. Somit könnte man mit der Änderung der Einheiten jedes beliebige Resultat 'generieren'.

⁴⁹ Das Zeichen 'Σ' bzw. 'sigma' bedeutet 'Summe aus'.

⁵⁰ unweighted index

4.2 Gewogene Indizes

Um die oben genannten Nachteile des ungewogenen Index' zu umgehen, hat man den gewogenen Index⁵¹ kreiert. Sofort ist die Problematik entstanden, mit welcher Gewichtung und zu welchem diesbezüglichen Zeitpunkt der gewogene Index berechnet werden soll.

Die erste Problematik wurde schnell gelöst, indem bei einem Preisindex die Mengen als Gewichtung herangezogen werden, und bei einem Mengenindex die Preise.

Bei der zweiten Problematik, nämlich der Zeitpunkt der Gewichtung, gibt es zwei Möglichkeiten:

- **Gewichtung zum Basiszeitpunkt: Laspeyres-Index,**
- **Gewichtung zum aktuellen Zeitpunkt 't': Paasche-Index.**

Daraus ergeben sich folgende Berechnungsformeln für den **Laspeyres- und Paasche-Index**

$$\text{Preisindex}_{\text{nach Laspeyres}} = \frac{\sum(\text{Preis}_{\text{Zeitpunkt } t} \cdot \text{Menge}_{\text{Basiszeitpunkt}})}{\sum(\text{Preis}_{\text{Basiszeitpunkt}} \cdot \text{Menge}_{\text{Basiszeitpunkt}})}$$

$$\text{Preisindex}_{\text{nach Paasche}} = \frac{\sum(\text{Preis}_{\text{Zeitpunkt } t} \cdot \text{Menge}_{\text{Zeitpunkt } t})}{\sum(\text{Preis}_{\text{Basiszeitpunkt}} \cdot \text{Menge}_{\text{Zeitpunkt } t})}$$

Vorteile und Nachteile von Laspeyres und Paasche:

- Der Vorteil des Laspeyres-Index' besteht darin, dass man relativ schnell den Index erstellen kann, d.h. man kann den Index auch ohne die aktuellen Mengen-Daten berechnen. Aus diesem Grund werden auch die Konsumentenpreisindizes anhand des Laspeyresindexes berechnet. Bei den Konsumentenpreisindizes besteht aber auch das Problem, dass die Mengen-Daten (auch Warenkorb genannt) aus technischen und finanziellen Überlegungen nur alle paar Jahre ermittelt werden.
- Der Nachteil des Laspeyres-Index' besteht darin, dass die Auswirkungen von Preisveränderungen nicht berücksichtigt werden. Beim Konsumentenpreisindex bedeutet dies, dass er tendenziell zu hoch ausfällt. Es wird nämlich nicht berücksichtigt, dass teurer werdende Produkte normalerweise durch billigere substituiert werden.
- Für den Paasche-Index gelten die gleichen Aussagen wie für den Laspeyres-Index, wobei die Vor- und Nachteile auszutauschen sind.

Um die oben genannten Vor- und Nachteile 'zu neutralisieren' wurde ein weiterer Index 'kreiert', nämlich der sogenannte (ideale) Fisher-Index:

Der **Preisindex nach Fisher** berechnet sich wie folgt:

$$\text{Index}_{\text{nach Fisher}} = \sqrt[2]{\text{Index}_{\text{nach Laspeyres}} \cdot \text{Index}_{\text{nach Paasche}}}$$

⁵¹ weighted indexes

Für das obige Beispiel ergibt dies für die Aktienkurse folgende Resultate:

Abb. 17: Gewogene Indizes Aktien-Portfeuille (2015) von Samuel Wagner

Aktienkursindex nach Laspeyres =	521.00	/	487.50	
		=		106.87
Aktienkursindex nach Paasche =	571.00	/	538.50	
		=		106.04
Aktienkursindex nach Fisher =		=		106.45

Nebst diesen drei Indizes, die sich entweder auf Preise oder Mengen beziehen, gibt es aber auch noch den **Wert-Index**⁵², **der sowohl die Veränderungen in den Preisen als auch der Mengen wiedergibt.**

Eine wichtige Eigenschaft des Wert-Index ist, dass er auch aufgrund der Multiplikation eines Preis- und Mengen-Indexes berechnet werden kann, wobei einer der beiden ein Laspeyres-Index sein muss und der andere ein Paasche-Index.

Der **Wert-Index** berechnet sich wie folgt:

$$\text{Wert-Index} = \frac{\sum (\text{Preis}_{\text{Zeitpunkt } t} \cdot \text{Menge}_{\text{Zeitpunkt } t})}{\sum (\text{Preis}_{\text{Basiszeitpunkt}} \cdot \text{Menge}_{\text{Basiszeitpunkt}})}$$

Für das obige Beispiel ergibt dies für das Aktien-Portfeuille folgenden Wert-Index:

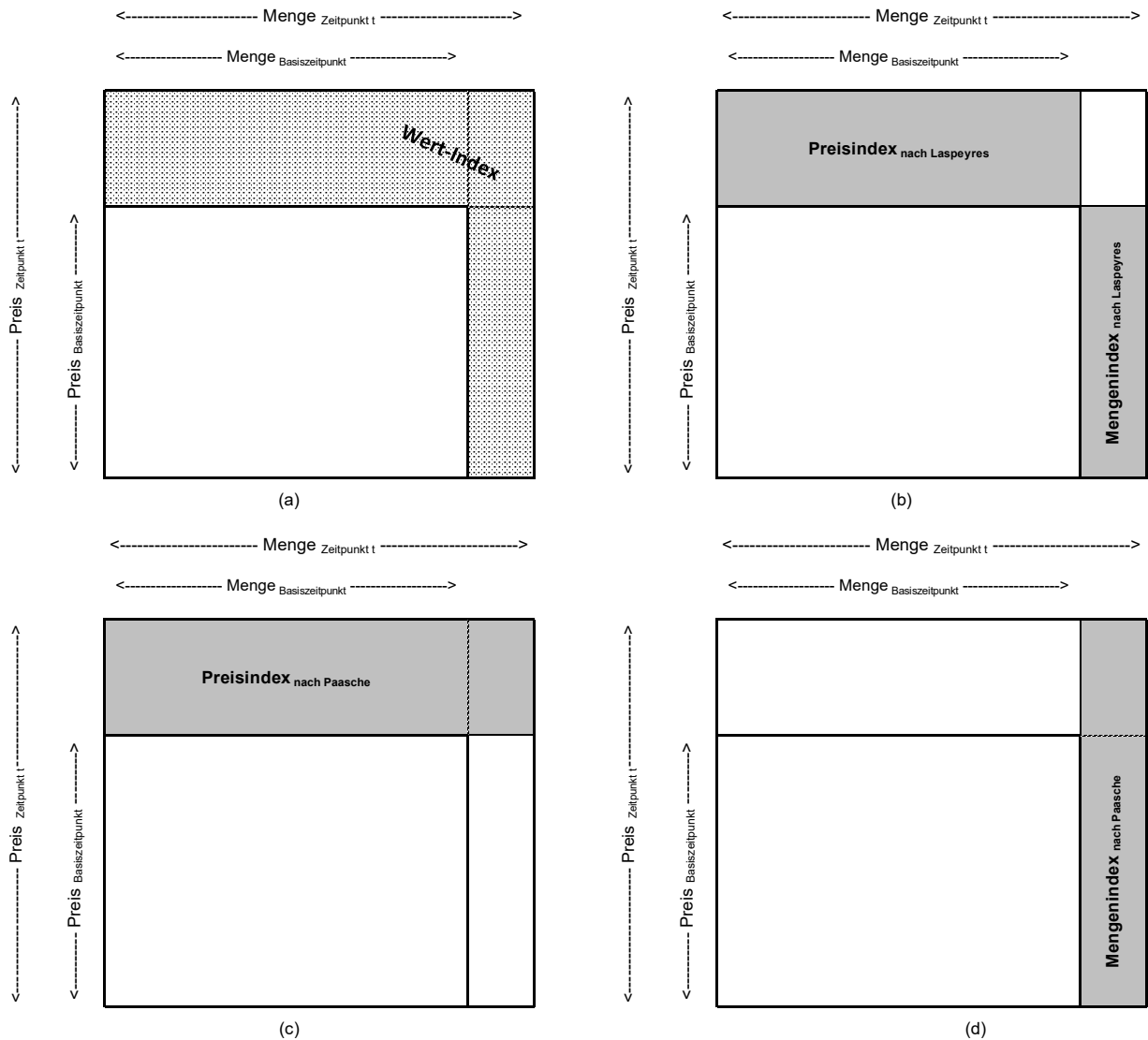
Abb. 18: Wert-Index Aktien-Portfeuille (2015) von Samuel Wagner

Wert-Index =	571.00	/	487.50	
		=		117.13

⁵² value index

Die obigen Ausführungen zum Wertindex sollen anhand der folgenden vier Darstellungen visualisiert werden:

Abb. 19: Zusammenhang Laspeyres-, Paasche- und Wert-Index



In Darstellung (a) bedeuten das innere und das äussere Rechteck je einen 'Wert', nämlich das Produkt aus 'Preis mal Menge'. Der Wert-Index (schraffierte Fläche) ist das äussere Rechteck dividiert durch das innere Rechteck, bzw. der 'Wert' zum Zeitpunkt t dividiert durch den 'Wert' zum Basiszeitpunkt.

Darstellung (b) zeigt den Preis- und Mengen-Index jeweils nach Laspeyres auf (siehe schraffierte Flächen). Sofort ersichtlich dabei ist, dass eine 'Lücke' in der oberen rechten Ecke entsteht, da beim Laspeyres-Index die Gewichtung immer zum Basiszeitpunkt erfolgt.

In den Darstellungen (c) und (d) sind die Preis- und Mengen-Indizes nach Paasche aufgezeichnet. Hier - im Gegensatz zu Darstellung (b) - ist sofort ersichtlich, dass nicht eine 'Lücke', sondern eine 'Überschneidung' der beiden Flächen entsteht. Dies ist darauf zurückzuführen, dass beim Paasche-Index die Gewichtung immer zum Zeitpunkt t erfolgt.

4.3 Umbasieren und Verketteten von Index-Reihen⁵³

Das **Umbasieren**⁵⁴ von Indexreihen entspringt dem Bedürfnis, **mehrere Indexreihen mit unterschiedlichen Basiszeitpunkten ohne Zusatzberechnungen zu vergleichen**. Mit dem Umbasieren werden die unterschiedlichen Basiszeitpunkte der Indexreihen vereinheitlicht und dadurch transparent vergleichbar gemacht.

Anhand eines Beispiels soll die Vorgehensweise verdeutlicht werden.

In der Folge sind die zwei Preisindizes der New York Stock Exchange U.S. 100 und des Dow Jones Industrial Average American Stock Exchange aufgeführt.

Abb. 20: Entwicklung Preisindizes NYSE U.S. 100 und des DJIA

Index-Stand Ende Jahr	2008	2009	2010	2011
NYSE U.S. 100 (NY.ID) (31.12.1995 = 3'000)	4'500.53	5'095.73	5'599.23	5'584.42
Dow Jones Industrial Average (DJIA) (26.5.1896 = 40.94)	8'776.39	10'428.05	11'577.51	12'217.56

Aufgrund der obigen Angaben kann kein direkter Vergleich zwischen den beiden Preisentwicklungen herausgelesen werden, da die Basiszeitpunkte unterschiedlich sind. Um eine transparente Gegenüberstellung zu erreichen, ist es hier am sinnvollsten, wenn neu der Index-Stand Ende 2008 als 100 'deklariert' wird. Die 'neuen' Indexreihen können durch einfache 'Zweisatzrechnungen' umbasiert werden.

Für das obige Beispiel ergibt dies nun neu folgende Preisindizes, wobei - um keine 'scheinbare' Genauigkeit vorzutäuschen - die 'neuen' Indexreihen nur noch auf eine Stelle nach dem Komma angegeben werden:

Abb. 21: 'Umbasierte' Indizes NYSE U.S. 100 und DJIA

Index-Stand Ende Jahr (umbasiert)	2008	2009	2010	2011
NYSE U.S. 100 (NY.ID)	100.0	113.2	124.4	124.1
Dow Jones Industrial Average (DJIA)	100.0	118.8	131.9	139.2

Unter **Verketteten**⁵⁵ von Indexreihen versteht man die **Vorgehensweise**, die gewählt wird, **wenn bei gewogenen Indizes von Zeit zu Zeit ein neues Gewichtungsschema angewendet wird und eine Vergleichbarkeit**, trotz dadurch entstehender 'Entwicklungsbrüche', **hergestellt werden soll**. Für den Konsumentenpreisindex der Schweiz wird zum Beispiel alle 5 bis 10 Jahre ein neuer 'Warenkorb' (Gewichtungsschema) ermittelt.

⁵³ shifting the base

⁵⁴ siehe auch BOHLEY, ⁶1996, S. 53f. und MASON, LIND, MARCHAL, 1967, ¹⁰2000, S. 630ff.

⁵⁵ siehe auch BOHLEY, ⁶1996, S. 54f. und MASON, LIND, MARCHAL, 1967, ¹⁰2000, S. 630ff.

Anhand eines Beispiels wird die Vorgehensweise verdeutlicht.

In der Folge sind zwei Reihen des schweizerischen Konsumentenpreisindex aufgeführt, nämlich eine Reihe mit der Basis Dez. 2005 = 100 und die andere Reihe mit der Basis Dez. 2010 = 100.

Abb. 22: Zwei Reihen des Konsumentenpreisindex

Index-Stand (Ende)	Dez. 2008	Dez. 2009	Dez. 2010	Dez. 2011	Dez. 2012
Landesindex der Konsumentenpreise 2005 (Dez. 2005 = 100)	103.3569	103.6491	104.1877		
Landesindex der Konsumentenpreise (Dez. 2010 = 100)			100.0000	99.2853	98.8540

Eine Verkettung von Indexreihen ist nur möglich, wenn bei den zwei Indexreihen eine 'Überlappung' besteht (siehe die beiden eingerahmten Indizes zum Zeitpunkt Dez. 2010). Durch diesen 'gemeinsamen Nenner' wird es möglich, die beiden Indexreihen miteinander zu verknüpfen und die 'fehlenden' Indexwerte durch einfache 'Zweisatzrechnungen' zu berechnen.

Für das obige Beispiel ergibt dies nun 'neu' folgende Produzentenpreisindizes:

Abb. 23: 'Verkettete' Konsumentenpreisindizes

Index-Stand (verkettet)	Dez. 2008	Dez. 2009	Dez. 2010	Dez. 2011	Dez. 2012
Landesindex der Konsumentenpreise 2005 (Dez. 2005 = 100)	103.3569	103.6491	104.1877	103.4431	102.9937
Landesindex der Konsumentenpreise (Dez. 2010 = 100)	99.2026	99.4830	100.0000	99.2853	98.8540

4.4 Aktienkurs-Indizes in der Praxis⁵⁶

Jeden Tag hören wir in den Nachrichten von der Veränderung des Dow Jones Industrial Average (DJIA), dem Swiss Market Index (SMI) usw. Wenn man genau hinhört, merkt man schnell, dass die verschiedenen Aktienkurs- bzw. Preis-Indizes sich unterschiedlich verändern. Die Gründe für gewisse Unterschiede sind klar (z.B. anderes Land, Börse, Aktien im 'Warenkorb' usw.), andere Gründe sind weniger klar. Letztere können **grundsätzlich auf die teilweise unterschiedliche Art und Weise der Gewichtung** der Aktien im 'Warenkorb' zurückgeführt werden.

Bei den Aktienkurs-Indizes werden prinzipiell drei Arten der Gewichtung der Aktien vorgenommen, nämlich:

- Preis bzw. Aktienkurs,
- Börsenkapitalisierung,
- ohne Gewichtung.

⁵⁶ siehe auch REILLY, BROWN, ⁶2000, S. 155ff.

Aktienkurs-Indizes mit Preis bzw. Aktienkurs als Gewichtung

Eine Preis- bzw. Aktienkurs-gewichtete Aktienkurs-Reihe ist das einfache arithmetische Mittel (siehe auch Kapitel 5.1.1) der im Index vertretenen, aktuellen Aktienkurse. **Der Aktienkurs-gewichtete Aktienkurs-Index**, der zur 'Familie' der 'ungewogenen Indizes' (siehe Kapitel 4.1) gehört, **ist somit die Summe aller im 'Warenkorb' sich befindenden Aktienkurse dividiert durch die Anzahl im 'Warenkorb' vertretenen Aktien bzw. Gesellschaften**. Aufgrund dieser Berechnungsart hat somit eine Aktie mit einem hohen Aktienkurs ein entsprechend höheres Gewicht. Nimmt eine Gesellschaft z.B. einen Aktien-Split vor, ist die 'Gewichtung' so zu korrigieren, wie wenn der Aktien-Split nicht stattgefunden hätte.

Die Grundüberlegung zu dieser Art des Aktienkurs-Indexes besteht darin, **dass angenommen wird, der Investor habe in je eine Aktie (oder ein Vielfaches davon) jeder im Index vertretenen Gesellschaft investiert**.

Beispiele für Aktienkurs-gewichtete Indizes sind:

- Dow Jones Industrial Average (DJIA) aus den 30 grössten Unternehmen, an der New York Stock Exchange (NYSE)
- Nikkei - Dow Jones Average (NIKKEI) aus 225 Unternehmen, an der Tokyo Stock Exchange (TSE)

Aktienkurs-Indizes mit Börsenkapitalisierung als Gewichtung

Eine Börsenkapitalisierungs-gewichtete Aktienkurs-Reihe entspricht dem Summenprodukt folgender Daten: aktueller Aktienkurs mal Anzahl (ausstehende) Aktien der Gesellschaft, addiert über alle im Index vertretenen Aktien. **Der Börsenkapitalisierungs-gewichtete Aktienkurs-Index**, der zur 'Familie' der 'gewogenen Indizes' oder genauer 'Wert-Indizes' (siehe Kapitel 4.2) gehört, **ist somit die aktuelle Summe aller im 'Warenkorb' sich befindenden Börsenkapitalisierungen dividiert durch die Summe aller im 'Warenkorb' sich befindenden Börsenkapitalisierungen zum Basiszeitpunkt**. Aufgrund dieser Berechnungsart hat somit eine Aktie mit einer hohen Börsenkapitalisierung ein entsprechend höheres Gewicht.

Nicht jeder Index-Stand im Basiszeitpunkt entspricht dem Wert '100'. Z.B. hat der SMI das Basisjahr 1988 mit einem Wert von '1'500' festgelegt. Aus diesem Grund muss die oben definierte Indexberechnung mit dem Index-Stand zum Basiszeitpunkt multipliziert werden.

Die Grundüberlegung zu dieser Art des Aktienkurs-Indexes besteht darin, **dass angenommen wird, der Investor habe in jede Aktie im Verhältnis zu ihrer Börsenkapitalisierung investiert**.

Die Mehrzahl der Aktienkurs-Indizes sind Börsenkapitalisierungs-gewichtete Indizes. In der Folge sind nur ein paar der bekanntesten beispielhaft aufgeführt:

- Standard & Poor's 500 Composite (S&P 500) aus 500 Unternehmen, an der New York Stock Exchange (NYSE) und Over-the-Counter (OTC)
- New York Stock Exchange Index (NYSE) aus allen Unternehmen (oder aufgeteilt in vier Sektoren), an der New York Stock Exchange (NYSE)
- National Association of Securities Dealers Automated Quotations (NASDAQ) aus 4'879 Unternehmen (oder aufgeteilt in sechs Sektoren), Over-the-Counter (OTC)
- Swiss Market Index (SMI) aus 18 ausgewählten Unternehmen, an der Schweizer Börse

Aktienkurs-Indizes ohne Gewichtung

Bei einer Aktienkurs-Reihe ohne Gewichtung haben alle im Index vertretenen Aktienkurse das selbe Gewicht, unabhängig davon wie hoch ihr Aktienkurs oder ihre Börsenkapitalisierung ist. **Der Aktienkurs-Index ohne Gewichtung**, wobei die Aktienkurseinzelindizes die Basis bilden (siehe Kapitel 4.1), ist somit das einfache arithmetische oder geometrische Mittel (siehe auch Kapitel 5.1.1 und 5.1.5) aus den Aktienkurseinzelindizes aller im 'Warenkorb' vertretenen Aktien bzw. Gesellschaften. Aufgrund dieser Berechnungsart hat somit jede Aktie das gleiche Gewicht. Der Aktienkurs-Index ohne Gewichtung gehört zur 'Familie' der 'ungewogenen Indizes'.

Die Grundüberlegung zu dieser Art des Aktienkurs-Indexes besteht darin, **dass angenommen wird, der Investor habe den gleichen absoluten Betrag in jeder im Index vertretenden Aktie investiert.**

Beispiele für ungewichtete Aktienkurs Indizes sind:

- Value Line (VL) Composite Averages aus 1'695 Unternehmen (geometrisches Mittel), an der New York Stock Exchange (NYSE), American Stock Exchange (AMEX) und Over-the-Counter (OTC)
- Financial Times Ordinary Share Index aus 30 wichtigen Unternehmen (geometrisches Mittel), an der London Stock Exchange (LSE)

Die meisten empirischen Untersuchungen werden anhand eines ungewichteten Aktienkurs-Indexes (arithmetisches Mittel) durchgeführt.

Berechnungsbeispiel zu Aktienkurs-Indizes⁵⁷

Die Veränderungen der Aktienkurse von vier Aktien (d.h. Alpha, Beta, Gamma und Delta) sollen anhand eines Aktienkurs-Indexes aufgezeichnet werden. Folgende diesbezügliche Daten seien bekannt:

Abb. 24: Veränderungen Aktienkurse von vier Aktien

Aktie	Anzahl Aktien	Aktienkurs	
		t = 0	t = 1
Alpha	1'000	60.00	80.00
Beta	10'000	20.00	35.00
Gamma	30'000	18.00	25.00
Delta	50'000	10.00	15.00

Gemäss den oben erwähnten drei möglichen Arten der Gewichtung können folgende Aktienkurs-Indizes ermittelt werden:

⁵⁷ siehe auch REILLY, BROWN, ⁶2000, S. 176.

Abb. 25: Aktienkurs-gewichteter Aktienkurs-Index

Aktie	Aktienkurs	
	t = 0	t = 1
Alpha	60.00	80.00
Beta	20.00	35.00
Gamma	18.00	25.00
Delta	10.00	15.00
Summe	108.00	155.00
Divisor	4	4
Ø = Index-Stand	27.00	38.75
Index-Veränderung	43.52%	

Abb. 26: Börsenkapitalisierungs-gewichteter Aktienkurs-Index

Aktie	Anzahl Aktien	Aktienkurs		Börsenkapitalisierung	
		t = 0	t = 1	t = 0	t = 1
Alpha	1'000	60.00	80.00	60'000.00	80'000.00
Beta	10'000	20.00	35.00	200'000.00	350'000.00
Gamma	30'000	18.00	25.00	540'000.00	750'000.00
Delta	50'000	10.00	15.00	500'000.00	750'000.00
Summe		108.00	155.00	1'300'000.00	1'930'000.00
Index-Stand (t = 0 sei 1'500)				1'500.0	2'226.9
Index-Veränderung				48.46%	

Abb. 27: Aktienkurs-Index ohne Gewichtung

Aktie	Aktienkurs		Aktienkurs- einzel- indizes	Basis: t = 1 versus 0
	t = 0	t = 1		
Alpha	60.00	80.00	1.3333	
Beta	20.00	35.00	1.7500	
Gamma	18.00	25.00	1.3889	
Delta	10.00	15.00	1.5000	
Index-Veränderung (arithmetisches Mittel)			1.4931	bzw. 49.31%
Index-Veränderung (geometrisches Mittel)			1.4849	bzw. 48.49%

4.5 Repetitionsfragen

4.5.1 Konzernumsatz-Entwicklung

Berechnen Sie aufgrund der untenstehenden Angaben die prozentuale Veränderung (gegenüber Vorjahr) des konsolidierten Umsatzes des Konzerns in Konzernwährung sowie die prozentuale Veränderung (gegenüber Vorjahr) aufgrund von Wechselkursabweichungen und die prozentuale Veränderung (gegenüber Vorjahr) aufgrund von Umsatzabweichungen in Lokalwährungen.

Umsätze 2011

Land / Konzern	'Translation- Kurs' 2011	Umsatz in Lokal- währung (in 1'000)	Umsatz in Konzern- währung (in 1'000)
	p_o	q_o	
USA	0.888	4'500	3'996
Grossbritannien	1.421	2'500	3'553
Deutschland	1.233	6'000	7'398
Schweiz	1.000	12'000	12'000
Total Konzern			<u>26'947</u>

Umsätze 2012

Land / Konzern	'Translation- Kurs' 2012	Umsatz in Lokal- währung (in 1'000)	Umsatz in Konzern- währung (in 1'000)
	p_i	q_i	
USA	0.939	5'000	4'695
Grossbritannien	1.487	3'000	4'461
Deutschland	1.205	6'100	7'351
Schweiz	1.000	11'900	11'900
Total Konzern			<u>28'407</u>

4.5.2 Auswirkung der Inflation auf die Erfolgsrechnung eines Unternehmens

Berechnen Sie aufgrund der untenstehenden Angaben den relativen Einfluss der Inflation auf den budgetierten Reingewinn 2013 der Handels-AG.

IST-Erfolgsrechnung der Handels-AG 2012

Materialaufwand	150	Erlös	250
Personalaufwand	50		
übriger Verwaltungs- und Vertriebsaufwand	30		
Betriebserfolg	20		
	<u>250</u>		<u>250</u>

voraussichtliche "Preisveränderungen":

Materialaufwand	8.0%	Erlös	5.0%
Personalaufwand	2.0%		
übriger Verwaltungs- und Vertriebsaufwand	1.5%		

4.5.3 Preis- und Mengenentwicklung eines Schnellimbissrestaurants in Zürich⁵⁸

Ein Schnellimbissrestaurant in Zürich hat zwei verschiedene Fastfood-Angebote, nämlich A und B. Der Geschäftsführer möchte die Preis- und Mengenentwicklung des Angebots im Jahr 2012 gegenüber 2011 untersuchen. Leider fehlen ihm die Mengenangaben für das Jahr 2011. Die übrigen Preise und verkauften Mengen der beiden Angebote sind in der folgenden Tabelle aufgeführt.

Fastfood-Angebot	Preis in (CHF / Stk.) 2011	Preis in (CHF / Stk.) 2012	Menge in (1'000 Stk.) 2012
A	5.25	5.50	8
B	3.50	3.25	20

- Berechnen Sie aufgrund der Ihnen zugänglichen Daten einen Preisindex und bezeichnen Sie den berechneten Index. Welche Aussagen können Sie aufgrund Ihrer Berechnungen machen?
- Es sei Ihnen bekannt, dass die durchschnittlich verkauften Mengen 2012 im Fastfood-Angebot (bewertet zu den Preisen von 2011) um 5% rückläufig waren. Aufgrund dieser Angabe ist zu berechnen, wie sich der Umsatz im Schnellimbissrestaurant 2012 gegenüber 2011 entwickelt hat.

⁵⁸ siehe auch ECKSTEIN, 1998, S. 23+128.

4.5.4 Einkaufs- und Verkaufspreisentwicklung eines Handelsunternehmens

Als neuer Controller eines Handelsunternehmens werden Sie beauftragt, die Einkaufs- und Verkaufsentwicklung der drei A-Artikel, Celfa 1, Celfa 2 und Celfa 3, zu untersuchen. Die drei A-Artikel werden in der Artikelgruppe 'Celfa' zusammengefasst. Diese Artikelgruppe ist für die Zukunft des Unternehmens von strategischer Bedeutung.

Folgende Daten sind Ihnen bekannt:

Jahr	Einkaufspreis pro Einheit			Verkaufspreis pro Einheit		
	Celfa 1	Celfa 2	Celfa 3	Celfa 1	Celfa 2	Celfa 3
2010	2.50	4.00	8.00	10.00	5.00	10.00
2011	3.00	5.00	8.50	10.50	4.50	11.00
2012	3.50	6.00	7.00	11.50	4.00	11.00

Jahr	Einkaufsmenge in Einheiten			Verkaufsmenge in Einheiten		
	Celfa 1	Celfa 2	Celfa 3	Celfa 1	Celfa 2	Celfa 3
2010	500	600	1'000	200	300	700
2011	750	620	1'050	350	500	700
2012	800	560	1'025	100	700	705

- Berechnen Sie für die Artikelgruppe 'Celfa' sowohl eine Einkaufspreis- als auch eine Verkaufspreisindex-Entwicklung seit 2010 (nach Laspeyres). Runden Sie erst die Endresultate Ihrer Berechnungen auf zwei Stellen nach dem Komma (zu einer Basis von 100 'Punkten').
- Welche Aussagen können aufgrund der Einkaufspreis- und Verkaufspreisindex-Entwicklung seit 2010 für die Artikelgruppe 'Celfa' (siehe Ihre obigen Ergebnisse) gemacht werden? (Begründen Sie Ihre Aussagen nicht nur verbal, sondern untermauern Sie diese mit Berechnungen.)
- Ihr Vorgänger hat auf der Basis 2008 für das Jahr 2009 und 2010 für die Artikelgruppe 'Celfa' die folgende Einkaufspreis- und Verkaufspreisindex-Entwicklung (nach Laspeyres) erstellt:

Artikelgruppe 'Celfa'	Einkaufspreis- Index	Verkaufspreis- Index
2009	105.23	102.30
2010	106.80	107.10

Leider besitzen Sie aber keine Detail-Unterlagen mehr. Sie sollten aber gegenüber der Geschäftsleitung trotzdem eine Aussage machen, wie sich die Einkaufspreis- und Verkaufspreisindex-Entwicklung von 2008 bis 2012 verändert hat.

(Begründen Sie Ihre Aussagen nicht nur verbal, sondern untermauern Sie diese - falls möglich - mit Berechnungen.)

5 MITTELWERTE UND KENNZAHLEN DER STREUUNG

5.1 Mittelwerte⁵⁹

In früheren Kapiteln wurde dargelegt, wie Rohdaten (Urliste) zu transformieren sind, damit sie aussagefähig bzw. sinnvoll werden. Zudem wurde auch gezeigt, dass anhand von Grafiken die Daten visuell prägnant abgebildet werden können. Erwähnt wurde dabei aber auch, dass damit sehr häufig der Informationsgehalt reduziert wird.

In der Folge werden nun Methoden beschrieben, wie die Daten durch eine Kennzahl umschrieben werden können. **Diese Kennzahlen werden auch als Masszahl der 'zentralen Tendenz'⁶⁰ oder einfach Durchschnitt⁶¹ bezeichnet.**

Es gibt aber nicht nur eine **Masszahl der 'zentralen Tendenz'**, sondern sehr **viele**. Hier werden die folgenden fünf Kennzahlen behandelt:

- das einfache (arithmetische) Mittel,
- das (gewichtete) arithmetische Mittel,
- der Median,
- der Modus,
- das geometrische Mittel.

5.1.1 Einfaches arithmetisches Mittel

Häufig umfassen statistische Untersuchungen alle Werte in einer Grundgesamtheit. **Für Rohdaten berechnet sich das einfache arithmetische Mittel⁶² aus der Summe aller Werte dividiert durch die Anzahl der Werte in der Grundgesamtheit.**

Das **einfache arithmetische Mittel einer Grundgesamtheit⁶³** berechnet sich somit wie folgt:

$$\mu = \frac{\sum x_i}{N}$$

μ steht für das einfache arithmetische Mittel einer Grundgesamtheit [mü]

N ist die Anzahl von Werten in der Grundgesamtheit

x_i steht für einen Wert der Grundgesamtheit

$\sum$ ist das Summenzeichen 'sigma' und zeigt die mathematische Operation des Summierens an

$\sum x_i$ ist die Summe aller x_i – Werte

Falls bei einer statistischen Untersuchung nicht die Grundgesamtheit zugänglich bzw. erfasst wird, sondern nur eine Stichprobe daraus, wird das einfache arithmetische Mittel zwar gleich berechnet, doch die Notation ändert sich ein bisschen: anstelle von ' μ ' steht nun neu ' $\bar{x}$ ' und anstelle von ' N ' steht nun neu ' n '.

⁵⁹ measures of location

⁶⁰ measure of central tendency

⁶¹ average

⁶² arithmetic mean

⁶³ population

Das **einfache arithmetische Mittel einer Stichprobe**⁶⁴ berechnet sich somit wie folgt:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$$

$\bar{x}$ steht für das einfache arithmetische Mittel einer Stichprobe [x quer]

n ist die Anzahl von Werten in der Stichprobe

x_i steht für einen Wert der Stichprobe

Das einfache arithmetische Mittel hat verschiedene wesentliche, positive Eigenschaften⁶⁵:

- Jedes Daten-Set mit einem 'Daten-Niveau mit Intervall' und 'Daten-Niveau mit Verhältniswert' weist ein einfaches arithmetisches Mittel auf.
- **Alle Werte werden bei der Berechnung des einfachen arithmetischen Mittels miteinbezogen.**
- Ein Daten-Set hat nur ein einfaches arithmetisches Mittel.
- Das einfache arithmetische Mittel ist eine gute Masszahl, um zwei oder mehrere Grundgesamtheiten zu vergleichen.
- **Das einfache arithmetische Mittel ist der einzige Mittelwert, bei dem die Summe der Abweichungen jedes einzelnen Wertes vom einfachen arithmetischen Mittel immer Null ergibt, d.h. $\sum(x_i - \bar{x}) = 0$.**

Aufgrund der letzten Eigenschaft wird das einfache arithmetische Mittel auch als 'Schwerpunkt' eines Daten-Sets bezeichnet. Dadurch ist es auch möglich, die Summe aller Werte des Daten-Sets indirekt anhand der Multiplikation des einfachen arithmetischen Mittels mit der Anzahl von Werten im Daten-Set zu berechnen.

Anhand von zwei Beispielen sollen die obigen Berechnungen illustriert werden.

In der unten stehenden Tabelle sind die Kilometerstände von fünf PKW eines Unternehmens aufgeführt. Wie gross ist das einfache arithmetische Mittel der Kilometerstände?

Abb. 28: Einfaches arithmetisches Mittel der Kilometerstände von fünf PKW

PKW	Kilometerstand
a	80'000
b	20'000
c	45'000
d	14'000
e	10'000
einfaches arithmetisches Mittel	33'800

⁶⁴ sample

⁶⁵ siehe MASON, LIND, MARCHAL, 1967, ¹⁰2000, S. 68.

Eine Stichprobe von fünf Manager hat ergeben, dass sie die weiter unten aufgeführten Boni letztes Jahr erhalten haben. Wie gross ist das einfache arithmetische Mittel der Boni der fünf Manager?

Abb. 29: Einfaches arithmetisches Mittel der Boni von fünf Manager

Manager	Bonus in CHF
A	30'000.00
B	15'000.00
C	40'000.00
D	70'000.00
E	15'000.00
einfaches arithmetisches Mittel	34'000.00

5.1.2 Gewogenes arithmetisches Mittel

Das gewogene arithmetische Mittel⁶⁶ ist ein **Spezialfall** des einfachen arithmetischen Mittels. Er tritt immer dann auf, **wenn mehrere Werte in einer Grundgesamtheit oder Stichprobe gleich gross und** die Rohdaten in einer relativen oder absoluten **Häufigkeitsverteilung** aufgeführt sind.

Das **gewogene arithmetische Mittel einer Stichprobe** berechnet sich nun wie folgt:

$$\bar{x} = \frac{\sum (w_i \cdot x_i)}{\sum w_i}$$

$\bar{x}$ steht für das gewogene arithmetische Mittel einer Stichprobe [x quer]

x_i steht für einen Wert einer Stichprobe, bzw. eine Kategorienmitte bei Häufigkeitsverteilungen

w_i ist die relative oder absolute Häufigkeit des Vorkommens von x_i

$\sum w_i$ steht für die Summe der relativen oder absoluten Häufigkeiten und ist entweder 1 oder n

Das oben aufgeführte Bonus-Beispiel der Manager sähe in diesem Spezialfall wie folgt aus:

Abb. 30: Gewogenes arithmetisches Mittel der Boni von fünf Manager

Bonus in CHF	Anzahl Manager
15'000.00	2
30'000.00	1
40'000.00	1
70'000.00	1
Total	5
34'000.00	gewogenes arithmetisches Mittel

⁶⁶ weighted mean

5.1.3 Median

Beim einfachen arithmetischen Mittel wurde bei den wichtigen Eigenschaften aufgeführt, dass alle Werte bei der Berechnung des Mittels miteinbezogen werden. Dies hat aber den Nachteil, dass besonders grosse oder kleine Werte im Daten-Set dazu führen können, dass das einfache arithmetische Mittel nicht mehr als geeignete Masszahl der 'zentralen Tendenz' herangezogen werden kann, bzw. dieses nicht mehr die 'zentrale Tendenz' repräsentiert. In einem solchen Fall ist es besser, den Median⁶⁷ zu berechnen.

Der Median ist derjenige Wert, bei dem - nachdem das Daten-Set in auf- oder absteigender Reihenfolge geordnet wurde - sowohl 50% der Datenvorkommnisse oberhalb als auch unterhalb zu liegen kommen, bzw. die Daten in zwei Hälften teilt.

Im oben aufgeführten Bonus-Beispiel der Manager sähe die Median-Berechnung somit wie folgt aus:

Abb. 31: Median der Boni von fünf Manager

Manager	Bonus in CHF
B	15'000.00
E	15'000.00
A	30'000.00
C	40'000.00
D	70'000.00
Median	30'000.00

Falls die Anzahl der Vorkommnisse **eine gerade Zahl** ist, muss für die Berechnung des Medians, das einfache (arithmetische) Mittel aus den am nächsten liegenden Vorkommniswerten gebildet werden. Der Median ist also derjenige Wert, der beim Vorkommnis $(n + 1) / 2$ auftritt. Bei einer geraden Anzahl von Vorkommnissen, liegt der Median deshalb genau zwischen zwei Vorkommniswerten. Bei Häufigkeitsverteilungen muss hingegen 'interpoliert' werden, d.h. man unterstellt eine gleichmässige Verteilung in der Kategorie und proportionalisiert entsprechend.

Wenn z.B. im oben aufgeführten Bonus-Beispiel der Manager noch ein sechster Manager eine Bonus-Angabe geliefert hätte (Manager F mit Bonus 35'000.00), ergäbe dies die folgende Median-Berechnung:

Abb. 32: Median der Boni von sechs Manager

Manager	Bonus in CHF
B	15'000.00
E	15'000.00
A	30'000.00
F	35'000.00
C	40'000.00
D	70'000.00
Median	32'500.00

⁶⁷ median

Der Median hat folgende positive Eigenschaften⁶⁸:

- Jedes Daten-Set weist nur einen Median auf.
- **Der Median wird nicht durch besonders grosse oder kleine Werte im Daten-Set beeinflusst** und ist deshalb - bei Vorliegen solcher 'Extremwerte' eine geeignete Masszahl der 'zentralen Tendenz'.
- Der Median kann für jedes Daten-Set berechnet werden, ausser für eines mit einem 'nominalen Daten-Niveau'.

5.1.4 Modus

Es gibt noch eine weitere Masszahl der 'zentralen Tendenz', nämlich den Modus⁶⁹.

Der Modus ist derjenige Wert (bzw. die diesbezügliche Kategorienmitte bei Häufigkeitsverteilungen) **der am häufigsten vorkommt**, und er eignet sich besonders gut zur Berechnung von Daten-Sets mit 'nominalen' und 'ordinalem Daten-Niveau'.

Im oben aufgeführten Bonus-Beispiel der Manager sähe die Modus-Berechnung somit wie folgt aus: (Zwei Manager (A* und E*) haben den gleichen Bonus, wodurch der Bonus von CHF 15'000.00 am häufigsten auftritt.)

Abb. 33: Modus der Boni von fünf Manager

Manager	Bonus in CHF
A	30'000.00
B *	15'000.00
C	40'000.00
D	70'000.00
E *	15'000.00
Modus	15'000.00

Der Modus hat folgende positive Eigenschaften⁷⁰:

- Der Modus kann für jedes Daten-Set berechnet werden, unabhängig welches Daten-Niveau vorhanden ist.
- **Der Modus wird nicht durch besonders grosse oder kleine Werte im Daten-Set beeinflusst** und ist deshalb - bei Vorliegen solcher 'Extremwerte' eine geeignete Masszahl der 'zentralen Tendenz'.

Der Modus hat aber auch zwei wichtige Nachteile, weshalb er weniger angewendet wird als das arithmetische Mittel oder der Median.

- Für viele Daten-Sets kann der **Modus überhaupt nicht berechnet werden**, da keiner der Werte mehr als einmal vorkommt.
- Häufig gibt es aber auch **mehrere Modi** in einem Daten-Set, nämlich immer dann, wenn gewisse Werte gleich häufig auftreten. In diesem Fall ist der Modus auch kaum eine geeignete Masszahl für die 'zentrale Tendenz'.

⁶⁸ siehe MASON, LIND, MARCHAL, 1967, ¹⁰2000, S. 73.

⁶⁹ mode

⁷⁰ siehe MASON, LIND, MARCHAL, 1967, ¹⁰2000, S. 73.

5.1.5 Geometrisches Mittel

Das geometrische Mittel⁷¹ eignet sich besonders gut, um den Durchschnitt von Prozentsätzen, Indizes oder Wachstumsraten zu berechnen.

Das geometrische Mittel eines Daten-Sets von n (positiven) Werten ist die n-te Wurzel aus der Multiplikation aller n Werte miteinander.

Das **geometrische Mittel** berechnet sich somit wie folgt:

$$x_{GM} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdots x_n} = \sqrt[n]{\prod x_i}$$

Anhand eines Beispiels soll die obige Berechnung illustriert werden.

Ein Unternehmen weist die weiter unten aufgeführten Umsatzwachstumsraten (gegenüber Vorjahr) auf. Wie gross ist das geometrische Mittel, bzw. der durchschnittliche Umsatzzuwachs pro Jahr, während der fünf Jahre?

Abb. 34: Jährliches Umsatzwachstum eines Unternehmens

Jahr	Umsatzwachstum gegenüber Vorjahr
2019	3.0%
2020	4.5%
2021	5.0%
2022	7.0%
2023	1.0%

Bei der Berechnung des geometrischen Mittels muss beachtet werden, dass die prozentualen Wachstumsraten in Einzelindexwerte umgewandelt werden, d.h. z.B. wird ein Wachstum von 3% in den Einzelindexwert '1.03' umgewandelt. Erst wenn dies für alle prozentualen Wachstumsraten gemacht wurde, kann das geometrische Mittel berechnet werden.

Für das obige Beispiel müsste das geometrische Mittel wie folgt berechnet werden:

Abb. 35: Geometrische Mittel jährliches Umsatzwachstum eines Unternehmens

Jahr	Umsatzwachstum gegenüber Vorjahr
2019	1.030
2020	1.045
2021	1.050
2022	1.070
2023	1.010
geometrisches Mittel	1.0408 bzw. 4.08%

⁷¹ geometric mean

Das geometrische Mittel hat die Eigenschaft, dass es immer kleiner oder gleich gross ist wie das arithmetische Mittel.

Wenn lediglich die beiden Eckdaten eines Daten-Sets bekannt sind, ist es sinnvoll, das geometrische Mittel anzuwenden. Nur dadurch kann die 'Zinseszinswirkung' des Wachstums korrekt berücksichtigt werden.

Anhand des folgenden Beispiels wird dies illustriert.

Ein Unternehmen hatte im Jahr 2022 einen Umsatz von CHF 15 Mio.; 2012 war der Umsatz erst CHF 5 Mio. Wie gross war das durchschnittliche, jährliche Umsatzwachstum während dieser Zeit?

Diese Fragestellung kann mit dem geometrischen Mittel beantwortet werden.

$$x_{GM} = \sqrt[10]{\frac{15}{5}} = \sqrt[10]{3} = 1.116 = 11.6\%$$

5.2 Kennzahlen der Streuung⁷²

Im letzten Kapitel ging es darum, Masszahlen der 'zentralen Tendenz' kennenzulernen. Durch eine einzige Kennzahl ist es aber häufig nicht möglich, ein Daten-Set hinlänglich zu umschreiben. Also ist man sehr schnell auf die Idee gekommen, **das Daten-Set auch anhand von Masszahlen bezüglich Streuung bzw. Variabilität zu 'erfassen'**.

Warum Kennzahlen bezüglich Streuung bzw. Variabilität eine besondere Bedeutung haben, zeigt sich darin, dass damit auch die 'Treffsicherheit' der Masszahl der 'zentralen Tendenz' ausgedrückt werden kann: **Eine kleine Streuung bedeutet hohe 'Treffsicherheit' und bedeutet für die Masszahl der 'zentralen Tendenz', dass sie das Daten-Set repräsentativ umschreibt**; ist hingegen die Streuung gross, verliert die Masszahl der 'zentralen Tendenz' an 'Wert' bzw. ist sie nicht mehr so repräsentativ. Mit dieser Aussage kann auch hergeleitet werden, dass für den 'Normalbürger' mit einer Masszahl bezüglich Streuung auch das im Daten-Set vorhandene **Risiko** umschrieben wird.

Wie bereits bei den Mittelwerten, gibt es auch bei den Kennzahlen der Streuung deren viele. Einige (z.B. Spannweite) umschreiben die ganze Streuung, andere hingegen (z.B. Varianz, Standardabweichung) beziehen sich auf das arithmetische Mittel.

5.2.1 Spannweite

Die einfachste Kennzahl bezüglich Streuung ist die Spannweite⁷³.

Die Spannweite ist die Differenz zwischen dem höchsten und niedrigsten Wert im Daten-Set.

Die **Spannweite** berechnet sich somit wie folgt:

$$\text{Spannweite} = \text{höchster Wert} - \text{niedrigster Wert}$$

Im oben aufgeführten Bonus-Beispiel der Manager würde sich die Spannweite wie folgt berechnen:

Abb. 36: Spannweite der Boni von fünf Manager

Manager	Bonus in CHF
B	15'000.00
E	15'000.00
A	30'000.00
C	40'000.00
D	70'000.00
Spannweite	55'000.00

Die Spannweite hat jedoch auch zwei wesentliche Nachteile:

- Die Spannweite bezieht sich nur auf den höchsten und niedrigsten Wert im Daten-Set. **Über die Verteilung zwischen diesen zwei Werten wird nichts ausgesagt.**
- Die **Spannweite ist durch die 'Extremwerte' bestimmt**, was nicht immer repräsentativ sein muss.

⁷² measures of dispersion

⁷³ range

5.2.2 Quartile

Um den ersten Nachteil der Spannweite zu 'korrigieren', hat man - in Anlehnung an den Median - zwei zusätzliche Kennzahlen der Streuung 'kreiert', nämlich das 1. und 3. Quartil⁷⁴. Das 2. Quartil wird nicht speziell hervorgehoben, da dies dem Median entspricht.

Das 1. (bzw. 3.) Quartil ist derjenige Wert, bei dem - nachdem das Daten-Set in aufsteigender Reihenfolge geordnet wurde - 25% der Datenvorkommnisse unterhalb (bzw. oberhalb) zu liegen kommen.

Das 1. Quartil ist derjenige Wert, der beim Vorkommnis $(n + 1) / 4$ auftritt, das 3. Quartil beim Vorkommnis $(n + 1) \cdot 3/4$. Ergibt dies keine ganze Zahl, muss - wie auch bei Häufigkeitsverteilungen - 'interpoliert' werden.

Im oben aufgeführten Bonus-Beispiel der Manager sähe die 1. und 3. Quartils-Berechnung somit wie folgt aus:

Abb. 37: 1. und 3. Quartil der Boni von fünf Manager

Manager	Bonus in CHF
B	15'000.00
E	15'000.00
A	30'000.00
C	40'000.00
D	70'000.00
1. Quartil	15'000.00
3. Quartil	55'000.00

5.2.3 Mittlere bzw. durchschnittliche absolute Abweichung vom arithmetischen Mittel

Um auch den zweiten Nachteil der Spannweite zu 'korrigieren', hat man - in Anlehnung an die Vorgehensweise beim arithmetischen Mittel - eine weitere Kennzahl der Streuung 'kreiert', nämlich die mittlere bzw. durchschnittliche absolute Abweichung vom arithmetischen Mittel⁷⁵.

Die mittlere bzw. durchschnittliche absolute Abweichung vom arithmetischen Mittel berechnet sich aus dem arithmetischen Mittel der absoluten Abweichungen vom arithmetischen Mittel.

Die **mittlere bzw. durchschnittliche absolute Abweichung vom arithmetischen Mittel einer Stichprobe** berechnet sich somit wie folgt:

$$MD = \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{n}$$

x_i steht für einen Wert der Stichprobe, bzw. eine Kategorienmitte bei Häufigkeitsverteilungen

$\bar{x}$ ist das arithmetische Mittel der Stichprobe

n ist die Anzahl von Werten in der Stichprobe

$| \ |$ steht für den absoluten Wert, bzw. das Vorzeichen wird einfach weggelassen

⁷⁴ quartiles

⁷⁵ mean deviation

Im oben aufgeführten Bonus-Beispiel der Manager ergäbe dies folgende mittlere bzw. durchschnittliche absolute Abweichung vom arithmetischen Mittel:

Abb. 38: Mittlere bzw. durchschnittliche absolute Abweichung der Boni von fünf Manager

Manager	Bonus in CHF	abs. Abweichung vom arithme- tischen Mittel
B	15'000.00	19'000.00
E	15'000.00	19'000.00
A	30'000.00	4'000.00
C	40'000.00	6'000.00
D	70'000.00	36'000.00
arithmetisches Mittel	→ 34'000.00	16'800.00 ← MD

Eigentlich spricht nichts gegen diese Kennzahl, doch hat sich gezeigt, dass sie aus mathematischen Gründen nicht sehr geeignet ist, bzw. es ist mit ihr (statistisch) weniger gut zu arbeiten als mit den folgenden Kennzahlen.

5.2.4 Standardabweichung

Bei der Ermittlung der mittleren bzw. durchschnittlichen absoluten Abweichung vom arithmetischen Mittel besteht die Schwierigkeit, dass man einerseits absolute Werte ermitteln und anschliessend mit diesen absoluten Abweichungen rechnen muss. Um diese Inkonvenienz zu umgehen, 'kreierte' man eine sehr ähnliche Kennzahl der Streuung, nämlich die Standardabweichung⁷⁶, bei der nicht die absoluten Abweichungen, sondern die quadrierten Abweichungen vom arithmetischen Mittel herangezogen werden. Um wegen dieser Vorgehensweise am Schluss keine Kennzahl in quadratischen Einheiten zu erhalten, zieht man vom Resultat noch die (zweite) Wurzel. Dadurch wird auch erreicht, dass die Kennzahl Standardabweichung die gleichen 'Einheiten' aufweist wie das arithmetische Mittel, der Median und der Modus.

Die Standardabweichung ist somit das gewogene arithmetische Mittel der Quadratabweichungen vom arithmetischen Mittel, aus dem man die Wurzel zieht.⁷⁷

Die **Standardabweichung einer Grundgesamtheit** berechnet sich somit wie folgt:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \mu)^2}{N}}$$

σ steht für die Standardabweichung einer Grundgesamtheit [sigma]

μ ist das arithmetische Mittel einer Grundgesamtheit [mü]

N ist die Anzahl von Werten in der Grundgesamtheit

x_i steht für einen Wert der Grundgesamtheit

⁷⁶ standard deviation

⁷⁷ siehe BOHLEY, ⁶1996, S. 154.

Falls bei einer statistischen Untersuchung nicht die Grundgesamtheit⁷⁸ zugänglich bzw. erfasst wird, sondern nur eine Stichprobe⁷⁹ daraus, wird die Standardabweichung sehr ähnlich berechnet und die Notation ändert sich ein bisschen: anstelle von ' σ ' steht nun neu ' s ', anstelle von ' μ ' steht nun neu ' $\bar{x}$ ' und anstelle von ' N ' steht nun neu ' $n - 1$ '.

Warum wird nicht durch ' n ', sondern durch ' $n - 1$ ' dividiert? Die Begründung besteht darin, dass bei einer Stichprobe das 'wahre' arithmetische Mittel (bzw. das arithmetische Mittel der Grundgesamtheit) nicht bekannt ist. Trotzdem benötigt man für die Berechnung der Standardabweichung die Abweichung von diesem (nicht bekannten) arithmetisches Mittel. Dadurch verliert man einen sogenannten 'Freiheitsgrad'. Dieses Manko an Information wird nun so berücksichtigt, dass man nicht durch ' n ' dividiert, sondern durch ' $n - 1$ '.

Die **Standardabweichung einer Stichprobe** berechnet sich somit wie folgt:

$$s = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}}$$

s steht für die Standardabweichung einer Stichprobe

$\bar{x}$ ist das arithmetische Mittel einer Stichprobe

n ist die Anzahl von Werten in der Stichprobe

x_i steht für einen Wert der Stichprobe

Taschenrechner berechnen normalerweise die Standardabweichung einer Stichprobe. Falls man aber die Standardabweichung einer Grundgesamtheit berechnen will, kann dies anhand eines Tricks bewerkstelligt werden: Zuerst rechnet man ganz 'normal' das arithmetische Mittel und fügt anschließend diesen Wert zum Daten-Set hinzu. Als weiteren Schritt berechnet man ganz 'normal' die Standardabweichung einer Stichprobe. Durch das Hinzufügen des arithmetischen Mittels zum Daten-Set hat man ' $n + 1$ ' Werte. Da man aber das arithmetische Mittel hinzugefügt hat, verändert sich die Quadratabweichung(ssumme) nicht, ausser dass nun neu ' $n + 1 - 1$ ' bzw. ' n ' bei der Ermittlung der Standardabweichung der Stichprobe verwendet wird.

Wenn die oben aufgeführte (korrekte) Berechnungsweise der Standardabweichung der Stichprobe in eine solche gemäss einer Standardabweichung der Grundgesamtheit umgewandelt werden möchte (oder vice versa), dann kann dies direkt aufgrund folgender Transformation vorgenommen werden:

Die **Transformation** berechnet sich wie folgt:

$$\sigma = \sqrt{\frac{n - 1}{n}} \cdot s \quad \text{bzw.} \quad s = \sqrt{\frac{n}{n - 1}} \cdot \sigma$$

Falls **mehrere Werte in einer Grundgesamtheit oder Stichprobe gleich gross** und die Rohdaten in einer relativen oder absoluten **Häufigkeitsverteilung** aufgeführt sind, dann muss dies bei der Berechnung der Standardabweichung entsprechend berücksichtigt werden.

⁷⁸ population

⁷⁹ sample

Die **Standardabweichung einer Grundgesamtheit** berechnet sich nun wie folgt:

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum [(x_i - \mu)^2 \cdot w_i]}{\sum w_i}}$$

- μ steht für das gewogene arithmetische Mittel einer Grundgesamtheit [mÜ]
- x_i steht für einen Wert der Grundgesamtheit, bzw. eine Kategorienmitte bei Häufigkeitsverteilungen
- w_i ist die relative oder absolute Häufigkeit des Vorkommens von x_i
- $\sum w_i$ steht für die Summe der relativen oder absoluten Häufigkeiten und ist entweder 1 oder N

Im oben aufgeführten Bonus-Beispiel der Manager würde sich die Standardabweichung wie folgt berechnen:

Abb. 39: Standardabweichung der Boni von fünf Manager

Manager	Bonus in CHF	Abweichung vom arithmetischen Mittel	Abweichung vom arithmetischen Mittel im Quadrat
A	30'000.00	-4'000.00	16'000'000.00
B	15'000.00	-19'000.00	361'000'000.00
C	40'000.00	6'000.00	36'000'000.00
D	70'000.00	36'000.00	1'296'000'000.00
E	15'000.00	-19'000.00	361'000'000.00
arithmetische Mittel			Summe
34'000.00			2'070'000'000.00
Standardabw.	20'346.99	Berechnungsweise Grundgesamtheit	
Standardabw.	22'748.63	Berechnungsweise Stichprobe	

5.2.5 Varianz⁸⁰

Wird die Standardabweichung quadriert, erhält man eine weitere Kennzahl der Streuung, nämlich die **Varianz**.

Die **Varianz einer Grundgesamtheit** berechnet sich somit wie folgt:

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \mu)^2}{N}$$

Die **Varianz einer Stichprobe** berechnet sich wie folgt:

$$s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}$$

⁸⁰ variance

Die Varianz hat, im Gegensatz zur Standardabweichung, 'quadratische' Einheiten und kann demzufolge mit dem arithmetischen Mittel in keinen direkten Bezug gesetzt werden.

5.2.6 Variationskoeffizient und Sharpe-Kennzahl

Mit der Angabe der Standardabweichung hat man eine absolute Kennzahl der Streuung. Will man aber die Streuung von zwei oder mehreren Daten-Sets mit unterschiedlichen Einheiten (z.B. CHF und kg) oder mit gleichen Einheiten aber sehr unterschiedlicher Grösse (z.B. in 1'000 CHF und in Mio. CHF) vergleichen, ist eine absolute Kennzahl wie die Standardabweichung nicht sehr geeignet. Aus diesem Grund 'kreierte' man eine **relative Kennzahl der Streuung**, nämlich den Variationskoeffizienten⁸¹.

Der Variationskoeffizient ist das prozentuale Verhältnis der Standardabweichung zum arithmetischen Mittel.

Der **Variationskoeffizient einer Stichprobe** berechnet sich somit wie folgt:

$$CV = \frac{s}{\bar{x}}$$

Im oben aufgeführten Bonus-Beispiel der Manager ergäbe dies ein Variationskoeffizient von:

$$CV = 66.9\%$$

Dies bedeutet, dass die Standardabweichung 66.9% des arithmetischen Mittels ausmacht.

Bei der Beurteilung von Investitions-Portefeuilles wird im Gegensatz zur 'Standardisierung' bezüglich des arithmetischen Mittels wie beim Variationskoeffizient grundsätzlich eine 'Standardisierung' bezüglich der Standardabweichung vorgenommen. Dies deshalb, weil beim Portfolio Management das Risiko meistens in Form der Standardabweichung der Renditen gemessen wird. **Eine der bekanntesten Kennzahlen für die Performance-Messung von unterschiedlichen Investitions-Portefeuilles ist die 'Sharpe-Kennzahl'**⁸². Sie misst die (Über-)Rendite pro Risiko-Einheit.

Die **Rendite/Risiko-Kennzahl von Sharpe**⁸³ berechnet sich wie folgt:

$$\text{Kennzahl von Sharpe}_{\text{in Periode } j} = \frac{\bar{R}_{\text{von Portefeuille } i \text{ in Periode } j} - \bar{R}_{\text{risikofreie Rendite}_{\text{in Periode } j}}}{\text{Standardabweichung der Rendite}_{\text{von Portefeuille } i \text{ in Periode } j}}$$

Da die risikofreie Rendite (z.B. der Bundesobligationen) definitionsgemäss kein Risiko aufweist, muss diese von der durchschnittlichen Rendite des Portefeuilles *i* abgezogen werden, damit eine sogenannte 'Überrendite' berechnet werden kann.

⁸¹ coefficient of variation

⁸² Sharpe ratio

⁸³ siehe auch REILLY, BROWN, ⁶2000, S. 1139f.

Anhand eines Beispiels soll die Sharpe-Kennzahl verdeutlicht werden:

Die zwei Investitions-Portefeuilles A und B sollen miteinander verglichen werden. Portefeuille A wies im letzten Jahr eine durchschnittliche jährliche Rendite von 14% auf, Portefeuille B eine solche von 16%; die Standardabweichungen der Renditen für das letzte Jahr betrug für Portefeuille A 20% und für das Portefeuille B 32%; die durchschnittliche risikofreie Rendite war 8%. Welche der beiden Portefeuilles weist die grössere relative Rendite pro Risikoeinheit auf?

$$\text{Sharpe-Kennzahl}_{\text{Portefeuille A}} = \frac{0.14 - 0.08}{0.20} = 0.30$$

$$\text{Sharpe-Kennzahl}_{\text{Portefeuille B}} = \frac{0.16 - 0.08}{0.32} = 0.25$$

Obwohl Portefeuille A eine geringere durchschnittliche Rendite hat, weist es eine grössere Sharpe-Kennzahl auf: Dies bedeutet, dass in bezug auf das Risiko (in Form der Standardabweichung der Rendite) das Portefeuille A eine relativ höhere Rendite aufweist als das Portefeuille B. Anders ausgedrückt, für das eingegangene Risiko weist das Portefeuille A eine bessere Rendite auf und ist deshalb vorzuziehen.

5.2.7 Schiefe⁸⁴

Die Verteilung der Werte eines Daten-Sets kann sehr unterschiedlich sein. Grundsätzlich unterscheidet man drei Typen der Verteilung, nämlich eine

- **symmetrische Verteilung**,
- eine linkssteile (bzw. rechtsschiefe) Verteilung oder eine **Verteilung mit positiver Schiefe**⁸⁵,
- eine rechtssteile (bzw. linksschiefe) Verteilung oder eine **Verteilung mit negativer Schiefe**⁸⁶.

Bei jedem der oben aufgeführten Verteilungstypen ist es möglich, klare Aussagen zu machen, wo sich das arithmetische Mittel, der Median oder der Modus in Relation zu den anderen Kennzahlen befindet.

⁸⁴ skewness

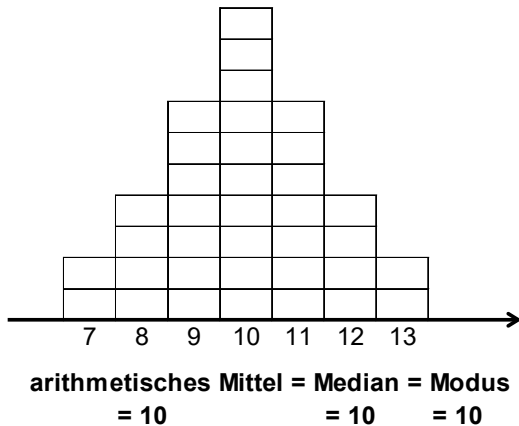
⁸⁵ positive skewness

⁸⁶ negative skewness

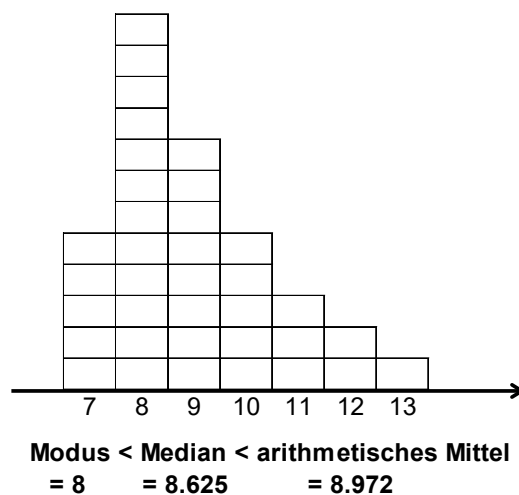
Die folgenden Darstellungen sollen einerseits die drei oben erwähnten Verteilungstypen visualisieren und andererseits aufzeigen, wo sich das arithmetische Mittel, der Median oder der Modus in Relation zu den anderen Kennzahlen befindet.

Abb. 40: Drei Grundtypen der Verteilung

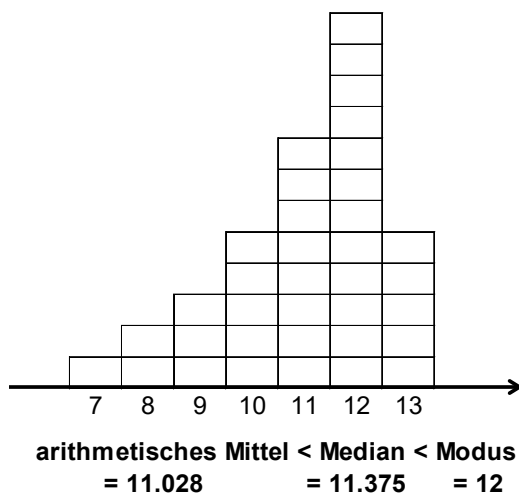
symmetrische Verteilung



Verteilung mit positiver Schiefe



Verteilung mit negativer Schiefe



5.2.8 Tschebyscheffsches Theorem

Wie bereits weiter oben erwähnt wurde, bedeutet eine kleine Streuung, dass sich die Werte des Daten-Sets relativ nahe beim arithmetischen Mittel befinden. Umgekehrt formuliert bedeutet dies, dass eine grosse Streuung aussagt, dass die Werte des Daten-Sets relativ weit weg vom arithmetischen Mittel sind.

Der russische Mathematiker *P. L. Tschebyscheff* hat im 19. Jahrhundert ein Theorem bzw. Lehrsatz aufgestellt, der es ermöglicht, eine Aussage zu machen, wie viele Werte eines Daten-Sets sich minimal innerhalb einer gewissen Anzahl von Standardabweichungen um das arithmetische Mittel befinden.

Das Tschebyscheffsche Theorem⁸⁷ besagt, dass unabhängig davon wie die Verteilung der Werte im Daten-Set auch aussieht, mindestens 75% der Werte im Bereich von $\mu \pm 2\sigma$, mindestens 89% der Werte im Bereich von $\mu \pm 3\sigma$, und 94% der Werte im Bereich von $\mu \pm 4\sigma$ anzutreffen sind.

5.2.9 Empirisches Gesetz

Das empirische Gesetz⁸⁸ ist ein Spezialfall des sehr allgemein gehaltenen Tschebyscheffschen Theorems. **Das empirische Gesetz besagt, dass für eine symmetrische, glockenförmig um das arithmetische Mittel angeordnete Verteilung der Werte des Daten-Sets rund 68% der Werte im Bereich von $\mu \pm 1\sigma$, ca. 95% der Werte im Bereich von $\mu \pm 2\sigma$, und praktisch alle Werte (bzw. 99.7%) im Bereich von $\mu \pm 3\sigma$ anzutreffen sind.**

Durch dieses Gesetz ist es anhand der Kennzahlen des arithmetischen Mittels und der Standardabweichung möglich, Rückschlüsse auf die Verteilung der Werte des Daten-Sets zu ziehen, obwohl diese nicht explizit bekannt ist (siehe dazu die weiteren Ausführungen in Kapitel 7.2.1, 8 und 9).

⁸⁷ Chebyshev's theorem

⁸⁸ empirical rule

5.3 Repetitionsfragen

5.3.1 Anzahl defekter Teile⁸⁹

Nachfolgend sind die Anzahl defekter Teile von sechs Maschinen während einer Periode von 22 Tagen aufgeführt.

9	8
11	11
12	9
9	12
9	11
12	8
9	11
12	10
9	11
8	10
9	9

Berechnen Sie den Modus, das arithmetische Mittel und die Standardabweichung der Anzahl defekter Teile der sechs Maschinen.

5.3.2 Einkaufs- und Verkaufspreise

Von einem Handelsunternehmen sind folgende Einkaufs- und Verkaufspreise für die drei A-Artikel, Celfa 1, Celfa 2 und Celfa 3, bekannt:

Jahr	Einkaufspreis pro Einheit			Verkaufspreis pro Einheit		
	Celfa 1	Celfa 2	Celfa 3	Celfa 1	Celfa 2	Celfa 3
2021	2.50	4.00	8.00	10.00	5.00	10.00
2022	3.00	5.00	8.50	10.50	4.50	11.00
2023	3.50	6.00	7.00	11.50	4.00	11.00

Berechnen und interpretieren Sie für den A-Artikel Celfa 2 und Celfa 1 jeweils das arithmetische Mittel, die Standardabweichung und den Variationskoeffizient.

⁸⁹ siehe auch UPTON, COOK, 1996, ²1997, S. 67.

5.3.3 Fahrkilometer einer PKW-Flotte⁹⁰

Die folgende Tabelle zeigt zusammengefasst die Anzahl Fahrkilometer (in 1'000 km), welche die PKW's einer 'Flotte' von 190 Stück gefahren sind, bevor die PKW's wegen eines grösseren Schadens repariert werden mussten.

Distanz (in 1'000 km)	Häufigkeit (absolut)
bis und mit 60	32
ab 60 bis und mit 80	25
ab 80 bis und mit 100	34
ab 100 bis und mit 120	46
ab 120 bis und mit 140	33
ab 140 bis und mit 220	20

Zeichnen Sie ein Histogramm der absoluten Häufigkeit der Fahrkilometer.
Wie gross sind der Modus, Median und das arithmetische Mittel der Anzahl Fahrkilometer?

5.3.4 Anzahl Arbeitsunfälle in einem Unternehmen⁹¹

In einem Unternehmen wurde die Anzahl Arbeitsunfälle des letzten Jahres untersucht. Folgende Auswertung wurde festgestellt:

kein Arbeitsunfall:	90%	der Mitarbeiter des Unternehmens
genau ein Arbeitsunfall:	8%	der Mitarbeiter des Unternehmens
genau zwei Arbeitsunfälle:	2%	der Mitarbeiter des Unternehmens

Bestimmen und interpretieren Sie für diese Daten das arithmetische Mittel, den Median, den Modus und die Standardabweichung der Anzahl Arbeitsunfälle je Mitarbeiter.

⁹⁰ siehe auch UPTON, COOK, 1996, ²1997, S. 45.

⁹¹ siehe auch ECKSTEIN, 1998, S. 6+111.

6 WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG

Ein wesentlicher Bestandteil unseres Wirtschaftslebens basiert auf dem möglichst ökonomischen Handeln unter Unsicherheiten, d.h. unter der Unvorhersehbarkeit zukünftiger Ereignisse. Diese Unsicherheiten stellen für den Unternehmer Risiken dar, die er nach Möglichkeit minimieren will. Mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung⁹² versucht man, diesem Umstand Rechnung zu tragen.

Im Gegensatz zu den früheren Kapiteln, in denen Daten über **vergangene** Ereignisse dargestellt und analysiert wurden, wird in diesem Kapitel aufgezeigt, wie mit Hilfe der Wahrscheinlichkeitsrechnung die möglichen **zukünftigen** Umweltzustände besser abgeschätzt werden können. Diese daraus gewonnene grössere Einsicht bzw. die dadurch erlangten Erkenntnisse über die möglichen, unterschiedlichen Zukunftereignisse bewirken, dass die Entscheide in der Gegenwart fundierter bzw. bewusster gefällt werden können.

Gerade in den letzten Jahren (durch Erdölkrisen, Rezessionen, Börsen-Crash's, Bürgerkriege usw.) wurde es jedermann wieder voll bewusst, dass die Zukunft vom Menschen nur sehr unklar vorausbestimmt werden kann. Die frühere Euphorie, der Mensch könne die Welt so beeinflussen, dass alles letztlich nur noch von ihm abhängig sei, ist verhaltene Nüchternheit gewichen, die von Zeit zu Zeit sogar eine 'apokalyptischen Dimension' aufweist. Um mehr Einsicht über die Zukunft zu erlangen, ist man Dank der Erkenntnisse der Wahrscheinlichkeitsrechnung nicht mehr gezwungen einen Astrologen oder die Orakelpriesterin Pythia in Delphi aufzusuchen. Auf rein nüchternen, plausiblen Überlegungen ist es jedermann möglich, die Zukunft besser abzuschätzen und somit die Gegenwart bewusster zu gestalten.

6.1 Was bedeutet 'Wahrscheinlichkeit'

Die Wahrscheinlichkeit ist eine Masszahl, welche die Möglichkeit des Auftretens⁹³ eines Ereignisses⁹⁴ aufzeigt. Diese Masszahl wird wie folgt definiert: die Anzahl der günstigen, gleichmöglichen Fälle⁹⁵ dividiert durch die Anzahl aller potentiellen, gleichmöglichen Fälle.

Ein Beispiel⁹⁶ soll dies verdeutlichen:

Eine Werbekampagne bietet als erster Preis ein Fahrrad an, wobei ein Lotterieverfahren bei der Auswahl angewendet wird. Es gibt insgesamt 1'000 Lose und eine Person erhält sieben davon. Die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses 'Fahrrad gewinnen' für diese Person beträgt $7 / 1'000$ oder 0.7%, da es insgesamt 1'000 potentielle, gleichmögliche Fälle gibt und sieben davon positiv für diese Person ausfallen können.

Speziell zu erwähnen ist der Begriff 'gleichmöglich' in der Definition. Wenn z.B. ein Los nicht bei der Ziehung mit dabei war, oder wenn die Ziehung nicht nach dem Zufallsverfahren vorgenommen wurde, wäre die oben berechnete Wahrscheinlichkeit falsch.

⁹² probability

⁹³ chance or likelihood

⁹⁴ event

⁹⁵ outcomes

⁹⁶ siehe auch MARTIN, FIRTH, 1983, S. 44.

Die Wahrscheinlichkeit nimmt stets die Werte im Bereich von Null bis Eins an. Dabei bedeutet Null **unmöglich** und Eins **sicher**.

Absolute Unmöglichkeit und Sicherheit sind im täglichen Leben selten anzutreffen. Die meisten Ereignisse sind zu einem grösseren oder kleineren Ausmass unsicher. D.h. ein wahrscheinliches Ereignis hat eine Wahrscheinlichkeit näher bei Eins, ein unwahrscheinliches Ereignis eine solche näher bei Null.

Im Gegensatz dazu basiert die absolute Unmöglichkeit (= Wert 0) und Sicherheit (= Wert 1) auf Aussagen über richtig oder falsch bezüglich der begrifflichen oder sachlichen Definition. So ist z.B. die Wahrscheinlichkeit, dass ein Junggeselle verheiratet ist aus begrifflicher Definition unmöglich, und dass Bern die Hauptstadt der Schweiz ist aus sachlicher Definition sicher.

Beim Rechnen mit Wahrscheinlichkeit gelten folgende Regeln bzw. Axiome⁹⁷:

- Axiom: Jedem Ereignis bzw. Umweltzustand wird eine reelle, nicht negative Zahl zwischen Null und Eins zugeordnet, welche als Wahrscheinlichkeit des Auftretens bezeichnet wird.
- Axiom: Der Gesamtheit aller Ereignisse bzw. Umweltzustände wird die Wahrscheinlichkeit 1 bzw. 100% zugeordnet.
- Axiom: Die Wahrscheinlichkeit von einander sich ausschliessender Ereignisse bzw. Umweltzustände ist die Summe der Wahrscheinlichkeiten dieser Ereignisse bzw. Umweltzustände.

6.2 Arten von Wahrscheinlichkeiten

Grundsätzlich gibt es drei Arten von Wahrscheinlichkeiten, nämlich die **theoretische** Wahrscheinlichkeit, die **statistische**⁹⁸ Wahrscheinlichkeit und die **subjektive**⁹⁹ Wahrscheinlichkeit.¹⁰⁰ Diese Arten werden nachstehend kurz erläutert:

6.2.1 Theoretische Wahrscheinlichkeit

Im 18. Jahrhundert untersuchten vor allem französische Mathematiker bei der Bestimmung der Chancen bei Glücksspielen die theoretischen Wahrscheinlichkeiten. So kann z.B. beim rein zufälligen Ziehen einer Karte aus einem vollständigen Karten-Set gefolgert werden, dass die Wahrscheinlichkeit ein As zu ziehen gleich $4 / 52$ oder rund 7.7% beträgt, da sich das Karten-Set aus 52 Karten zusammen setzt und darin 4 Asse enthalten sind.

6.2.2 Statistische Wahrscheinlichkeit

Ein Bäcker möchte wissen, wie gross die Wahrscheinlichkeit ist, dass er zwischen 100 und 110 Brote pro Tag verkaufen kann. Theoretische Überlegungen helfen ihm dabei nicht. Hingegen kann er aufgrund einer Untersuchung seiner Verkäufe in der Vergangenheit herleiten, dass er z.B. in 34 der vergangenen 200 Tage zwischen 100 und 110 Brote pro Tag verkauft hat. Somit beträgt die statistische Wahrscheinlichkeit $34 / 200$ oder 17%. Offensichtlich aktualisiert sich die Bestimmung dieser Wahrscheinlichkeit durch die Zunahme der Anzahl untersuchten Verkäufe der Vergangenheit.

Eigentlich müssten "eine genügend lange Folge voneinander unabhängiger Versuche" durchgeführt werden, damit das "Gesetz der grossen Zahl" den "verborgenen Typus" zum Vorschein kommen lässt. Die zugrundeliegende Überlegung ist "auf den österreichischen Mathematiker *Richard von Mises* (1883-1953)" zurückzuführen.¹⁰¹

⁹⁷ siehe auch HUNZIKER, SCHEERER, ⁶1984, S. 104ff., MARTIN, FIRTH, 1983, S. 43ff., BOHLEY, ⁶1996, S. 312f., BOSCH, 1996, S. 57.

⁹⁸ empirical

⁹⁹ subjective

¹⁰⁰ siehe auch MARTIN, FIRTH, 1983, S. 43f.

¹⁰¹ BOHLEY, ⁶1996, S. 305.

In der wirtschaftlichen Realität besteht einerseits meistens zu wenig Zeit, um eine genügend lange Folge von Untersuchungen durchzuführen, und andererseits ist es durch die sich stets verändernden Umweltbedingungen nicht möglich, voneinander unabhängige Versuche unter gleichen Voraussetzungen durchzuführen. Man kann nur bemüht sein, möglichst viele Beobachtungen durchzuführen und abzuklären, ob während der Zeit der erfassten Beobachtungen keine sogenannten Strukturbrüche (z.B. Rezessionen, Änderungen der Gesetzesvorschriften, Umstrukturierungen usw.) vorgekommen sind.

6.2.3 Subjektive Wahrscheinlichkeit

Herr Müller hat beschlossen, eine neue Anstellung zu suchen. Nachdem er sich auf mehrere Stelleninserate beworben hat, versucht er nach seinem Vorstellungsgespräch beim ersten Unternehmen abzuschätzen, wie gross die Wahrscheinlichkeit ist, dass es zu einem Vertragsabschluss bei diesem Unternehmen kommt. Wenn Herr Müller wüsste, dass ausser ihm noch weitere vier Kandidaten zur Auswahl stehen, könnte er aufgrund der theoretischen Wahrscheinlichkeit schliessen, dass seine Chance $1/5$ oder 20% beträgt. Dabei wird unterstellt, dass einer der fünf Kandidaten auch effektiv angestellt wird.

Falls Herr Müller aber eine Untersuchung gelesen hätte, die feststellt, dass von z.B. 300 befragten Stellensuchenden, die sich auf mehrere Stelleninserate beworben haben, nur bei 45 ein Vertragsabschluss beim ersten Unternehmen zustande gekommen ist, müsste er aufgrund der statistischen Wahrscheinlichkeit schliessen, dass seine Chance $45/300$ oder 15% beträgt.

Da aber das Vorstellungsgespräch sehr positiv verlaufen ist und er dabei eine grosse Übereinstimmung der Bedürfnisse und Anforderungen feststellen konnte, schätzt Herr Müller seine Chancen auf 30% ein. Diese subjektive Wahrscheinlichkeit hängt von **seiner persönlichen Anschauung bzw. Überzeugung** ab.

Für Stellensuchende kann es von Vorteil sein, einen Headhunter bei der Stellensuche einzuschalten, da dieser meist aufgrund seiner Vorabklärungen die Bedürfnisse und Anforderungen des Unternehmens bzw. Auftraggebers sowie des Stellensuchenden kennt und nur solche Kandidaten dem Auftraggeber vorschlägt, bei denen er davon ausgehen kann, dass eine gegenseitige Übereinstimmung der Bedürfnisse und Anforderungen vorhanden ist. Dadurch erhöht sich für den Stellensuchenden die Wahrscheinlichkeit eines Vertragsabschlusses. Meist erwartet der Auftraggeber aber vom Headhunter, dass er mehrere Kandidaten zur Auswahl vorschlägt. Der Headhunter ist somit geneigt, auch solche Kandidaten vorzuschlagen, die seiner Ansicht nach suboptimal sind, wodurch sich die Wahrscheinlichkeit des Stellensuchenden wieder verringert.

Die subjektive Methode der Ermittlung von Wahrscheinlichkeiten hängt stark von der Person und ihren Erfahrungen ab. Trotzdem sind diese Wahrscheinlichkeiten nützlich bei Unternehmensentscheidungen. Es sollte aber versucht werden, mehrere Einschätzungen von Sachverständigen einzuholen, bevor eine Aussage über die Verlässlichkeit der subjektiven Wahrscheinlichkeit gemacht werden kann.

6.3 Wichtigste Rechenregeln

Die wichtigsten Rechenregeln¹⁰² der Wahrscheinlichkeitsrechnung werden nachstehend kurz und beispielhaft erläutert:

6.3.1 Komplementäres Ereignis

Wenn die Wahrscheinlichkeit, dass es morgen regnet gleich 0.7 oder 70% beträgt, ist die Wahrscheinlichkeit, dass es morgen nicht regnet $1.0 - 0.7 = 0.3$ oder 30%. Anders formuliert: Die Wahrscheinlichkeit des Auftretens eines Ereignisses plus die Wahrscheinlichkeit des Nicht-Auftretens dieses Ereignisses (komplementäres Ereignis) ergibt den Wert 1.0 oder 100%.

6.3.2 Einfache Additionsregel

Die Wahrscheinlichkeit, dass an der Kasse null, ein, zwei oder drei Kunde(n) stehen, sei 0.4, 0.3, 0.2 und 0.1.

Die Wahrscheinlichkeit, dass an der Kasse ein oder zwei Kunden stehen, beträgt somit $0.3 + 0.2 = 0.5$ oder 50%; diejenige, dass weniger als drei Kunden stehen, somit $0.4 + 0.3 + 0.2 = 0.9$ oder 90%. Diese Rechenregel der einfachen Addition gilt nur unter der Bedingung, dass sich die Ereignisse gegenseitig ausschließen (siehe auch 'Verallgemeinerte Additionsregel' weiter unten).

6.3.3 Einfache Multiplikationsregel

Zwei Ereignisse werden als voneinander **unabhängig** bezeichnet, wenn das Auftreten oder Nicht-Auftreten des einen Ereignisses die Wahrscheinlichkeit des Auftretens des anderen Ereignisses nicht beeinflusst.

Die Wahrscheinlichkeit, dass nach dem Werfen eines 'idealen' Würfels die Augenzahl sechs auftritt, beträgt $1 / 6$; die Wahrscheinlichkeit, dass beim rein zufälligen Ziehen einer Karte aus einem vollständigen Karten-Set eine Pik-Karte gezogen wird, beträgt $13 / 52$ oder $1 / 4$. Wenn nun sowohl der Würfel geworfen als auch eine Karte gezogen wird und die Wahrscheinlichkeit gefragt ist, dass sowohl die Augenzahl sechs als auch eine Pik-Karte auftritt, berechnet sich diese durch Multiplikation der beiden Wahrscheinlichkeiten ($1 / 6 \cdot 1 / 4 = 1 / 24$).

Eine Maschine könne aus drei Gründen, nämlich aus elektrischen, mechanischen oder durch Fehlbedienung, nicht funktionieren. Die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten betragen 2%, 1% und 0.5%. Unter der Annahme, dass die drei Gründe unabhängig voneinander eintreten können, soll die Wahrscheinlichkeit des Nicht-Funktionierens der Maschine berechnet werden.

Da die Maschine aus verschiedenen Gründen nicht funktionieren kann (nur aus elektrischen, aus elektrischen und mechanischen usw.), ist es in diesem Fall einfacher die jeweiligen Wahrscheinlichkeiten des Funktionierens zu berechnen, d.h.

- Wahrscheinlichkeit keines elektrischen Fehlers = $1.00 - 0.02 = 0.98$,
- Wahrscheinlichkeit keines mechanischen Fehlers = $1.00 - 0.01 = 0.99$,
- Wahrscheinlichkeit keines Fehlbedienungs-Fehlers = $1.000 - 0.005 = 0.995$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Maschine ohne Fehler läuft, beträgt somit $0.98 \cdot 0.99 \cdot 0.995 = 0.9653$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass die Maschine aus irgendeinem der drei Gründe nicht läuft, beträgt somit 3.47% ($1.0000 - 0.9653 = 0.0347$).

¹⁰² siehe auch MARTIN, FIRTH, 1983, S. 44ff.

6.3.4 Verallgemeinerte Additionsregel

Falls sich die Ereignisse nicht gegenseitig ausschliessen, gilt die einfache Additionsregel nicht.

Die Wahrscheinlichkeit, dass beim rein zufälligen Ziehen einer Karte aus einem vollständigen Karten-Set eine Pik-Karte gezogen wird, beträgt $13 / 52$ oder $1 / 4$, diejenige, dass ein Ass gezogen wird, $4 / 52$ oder $1 / 13$. Die Wahrscheinlichkeit, dass sowohl ein Ass als auch eine Pik-Karte, d.h. das Pik-Ass, gezogen wird, beträgt $1 / 52$. Will man nun die Wahrscheinlichkeit berechnen, dass entweder eine Pik-Karte oder ein Ass gezogen wird, ergibt dies $16 / 52$, nämlich 13 Pik-Karten und drei andere Asses, da sich in den 13 Pik-Karten nämlich bereits ein Ass befindet. Wichtig ist, dass diese Wahrscheinlichkeit nicht der einfachen Addition der beiden Ereignisse entspricht, sondern um die Wahrscheinlichkeit, dass beide Ereignisse miteinander eintreten können, d.h. im obigen Beispiel um die Wahrscheinlichkeit des Pik-Ass, reduziert werden muss. Wenn beide Ereignisse nicht miteinander eintreten können bzw. sich gegenseitig ausschliessen, ist diese Wahrscheinlichkeit Null, und es gilt wieder die einfache Additionsregel.

6.3.5 Bedingte Wahrscheinlichkeit

Eine Umfrage von 100 Personen zeigt die folgende Geschmacks-Präferenz für ein Produkt:

Geschlecht / Präferenz	Vorliebe	Abneigung	Total
männlich	31	19	50
weiblich	39	11	50
Total	70	30	100

Die oben aufgeführte Tabelle ist eine '2 • 2'-Möglichkeiten-Tabelle¹⁰³, die eine zweiteilige Klassifikation jeder der beiden Faktoren Geschlecht und Präferenz darstellt.

Obwohl 50% der Personen der Umfrage männlich bzw. weiblich sind und 70% (30%) eine Vorliebe (Abneigung) für das Produkt angeben, beträgt die Wahrscheinlichkeit der männlichen Personen mit einer Vorliebe für das Produkt $31 / 100$ oder 31%. Dies entspricht nicht $0.5 \cdot 0.7 = 0.35$ oder 35%, da die beiden Faktoren nicht unabhängig voneinander sind. Dies zeigt sich darin, dass die männlichen Personen eine geringere Vorliebe für das Produkt als die weiblichen Personen haben. Zur Berechnung dieser Differenz wird der Begriff der bedingten Wahrscheinlichkeit eingeführt: vorausgesetzt, dass eine befragte Person männlich ist, beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass er eine Vorliebe für das Produkt hat, $31 / 50$ oder 62%. Dies wird auch wie folgt ausgesprochen: Vorliebe für das Produkt, gegeben männliches Geschlecht. Womit wir gleich auf die verallgemeinerte Multiplikationsregel überleiten können.

6.3.6 Verallgemeinerte Multiplikationsregel

Mathematischer Lösungsweg

Aufgrund des obigen Beispiels ergibt sich, dass die Wahrscheinlichkeit 'männlicher Personen mit einer Vorliebe für das Produkt' aus der Multiplikation der Wahrscheinlichkeit 'männliche Personen' mit der Wahrscheinlichkeit 'Vorliebe für das Produkt, gegeben männliches Geschlecht' zusammensetzt, d.h. $50 / 100 \cdot 31 / 50 = 1'550 / 5'000$ oder $50\% \cdot 62\% = 31\%$. Wenn beide Ereignisse unabhängig voneinander sind, ist die Bedingung irrelevant, und es gilt wieder die einfache Multiplikationsregel.

¹⁰³ contingency table

Ein weiteres Beispiel soll dies verdeutlichen:

Ein Qualitäts-Kontroll-System überprüft alle Komponenten am Ende der Produktionsstrasse. Es wurde empirisch festgestellt, dass 4% der Komponenten fehlerhaft sind. Aufgrund von eingehenden, sehr teuren Untersuchungen wurde festgestellt, dass das Qualitäts-Kontroll-System eine fehlerhafte Komponente mit einer Wahrscheinlichkeit von 99% feststellt, doch in 5% der Fälle wird auch eine einwandfreie Komponente vom Qualitäts-Kontroll-System als fehlerhaft 'deklariert'. Die Frage lautet nun: Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Qualitäts-Kontroll-System eine korrekte Beurteilung vornimmt?

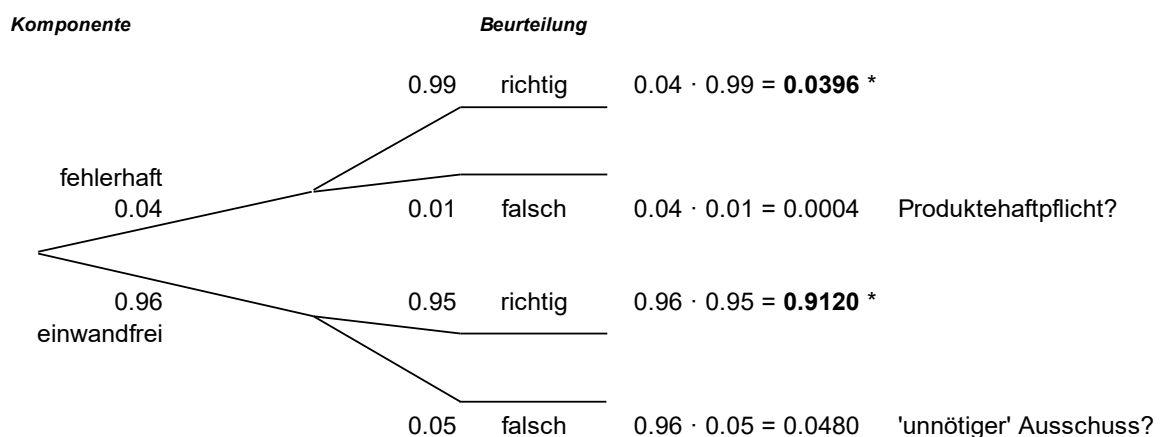
Die Wahrscheinlichkeit, dass das Qualitäts-Kontroll-System eine fehlerhafte Komponente feststellt und diese auch wirklich fehlerhaft ist, beträgt $0.04 \cdot 0.99 = \mathbf{0.0396}$; die Wahrscheinlichkeit, dass das Qualitäts-Kontroll-System eine einwandfreie Komponente feststellt und diese auch wirklich einwandfrei ist, beträgt $0.96 \cdot 0.95 = \mathbf{0.9120}$.

Eine korrekte Beurteilung macht das Qualitäts-Kontroll-System in beiden Fällen, was bedeutet, dass die Wahrscheinlichkeit 95.16% beträgt ($0.0396 + 0.9120 = 0.9516$).

Visualisierter Lösungsweg mit Baumdiagramm

Anhand eines Baumdiagramms¹⁰⁴ kann das obige Beispiel des Qualitäts-Kontroll-Systems auch visualisiert gelöst werden.

Abb. 41: Baumdiagramm Qualitäts-Kontroll-System



Die hervorgehobenen und mit Sternzeichen versehenen Wahrscheinlichkeiten sind diejenigen Ereignisse, bei denen das Qualitäts-Kontroll-System eine korrekte Beurteilung abgibt.

Jede Komponente kann entweder fehlerhaft oder einwandfrei sein und anschliessend richtig oder falsch durch das Qualitäts-Kontroll-System beurteilt werden. Die jeweiligen Wahrscheinlichkeiten sind an den Ästen vermerkt und deren Summe ergibt bei jeder Verästelung 1.00 oder 100%. Die Wahrscheinlichkeiten entlang jeden Pfades werden miteinander multipliziert, um die Wahrscheinlichkeiten der vier möglichen Fälle zu ermitteln. Zur Überprüfung sollte die Addition dieser Wahrscheinlichkeiten 1.00 oder 100% ergeben.

Lehrsatz von Bayes (visualisierter Lösungsweg)

Drei Maschinen, nämlich A, B und C, produzieren 65%, 25% und 10% der Tagesproduktion an Präzisionsteilen in einer Fabrik. Der Anteil an Präzisionsteilen, welche die Toleranzlimite überschreiten, sind von Maschine zu Maschine unterschiedlich, d.h. bei A sind es 1%, bei B 5% und bei C 10%.

¹⁰⁴ tree diagram

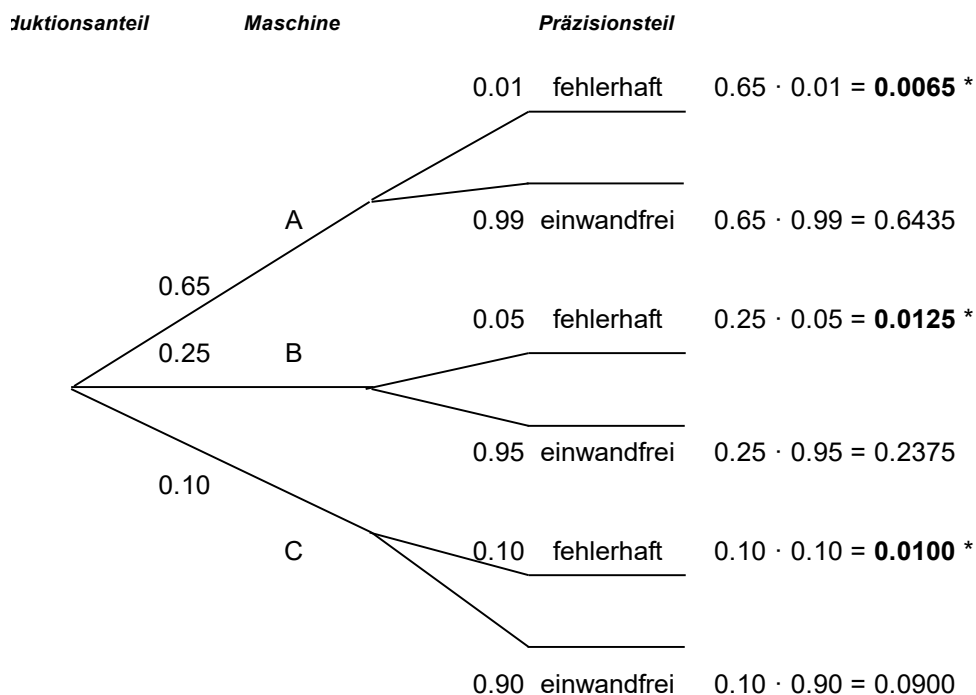
Ein Präzisionsteil wird überprüft und es wird festgestellt, dass es zu gross ist. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieses Präzisionsteil von der Maschine A hergestellt wurde?

Einerseits wäre eine Wahrscheinlichkeit von 65% intuitiv (*a priori*) einleuchtend, da 65% der Tagesproduktion von der Maschine A produziert wird. Andererseits ist die Maschine A die effizienteste bzw. hat den geringsten 'Ausschuss' an Präzisionsteilen. Diese beiden Faktoren sollten sich irgendwie gegenseitig ausbalancieren, damit eine angepasste, A-posteriori-Wahrscheinlichkeit ermittelt werden kann (siehe Herleitung weiter unten).

Eine weitere Fragestellung würde wie folgt lauten: Welche Maschine sollte zuerst 'überholt' werden? Wäre das Entscheidungskriterium der Produktionsanteil, müsste Maschine A 'revidiert' werden, da Maschine A am meisten produziert, nämlich 65%. Wäre hingegen das Entscheidungskriterium der prozentuale Anteil an fehlerhaften Präzisionsteilen je Maschine, müsste Maschine C 'revidiert' werden, da Maschine C den grössten Anteil an fehlerhaften Präzisionsteilen aufweist, nämlich 10%. Wie weiter unten hergeleitet wird, ist es aber ökonomisch richtig, die 'Überholung' der Maschine B vorzunehmen.

Mit einem Baumdiagramm soll der obige Sachverhalt bildlich dargestellt werden.

Abb. 42: Baumdiagramm Ausschuss- und Produktionsanteile von drei Maschinen



Die hervorgehobenen und mit Sternzeichen versehenen Wahrscheinlichkeiten sind diejenigen Ereignisse, bei denen fehlerhafte Präzisionsteile produziert werden.

Fehlerhafte Präzisionsteile werden von allen drei Maschinen produziert, insgesamt also bei $0.0065 + 0.0125 + 0.0100 = 0.0290$ oder 2.9% der Tagesproduktion. Der Anteil der Maschine A an den fehlerhaften Präzisionsteilen beträgt $0.0065 / 0.0290$, also 0.224 oder 22.4%. Der Anteil der Maschine B an den fehlerhaften Präzisionsteilen beträgt $0.0125 / 0.0290$, also 0.431 oder 43.1%; bei Maschine C 0.345 oder 34.5%.

Aufgrund dieser drei A-posteriori-Wahrscheinlichkeiten ist ersichtlich, dass Maschine B die höchste Wahrscheinlichkeit aufweist, das fehlerhafte Präzisionsteil produziert zu haben. Dies ist genau der Sinn des Lehrsatzes von Bayes¹⁰⁵, der erlaubt die Wahrscheinlichkeiten anzupassen, wenn zusätzliche Informationen vorhanden sind.

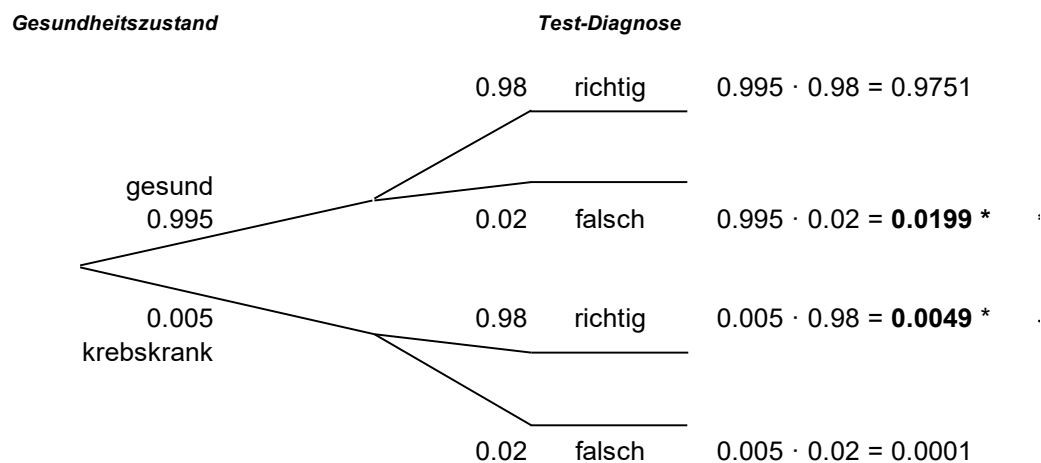
Mit dem folgenden Beispiel¹⁰⁶ soll der wesentliche Sinn des Theorems von Thomas Bayes aus dem 18. Jahrhundert weiter vertieft werden.

Angenommen es gibt ein Testverfahren, mit Hilfe dessen festgestellt werden kann, ob jemand an Krebs leidet oder nicht. In 98% der Fälle wird damit eine richtige Diagnose gestellt. Weiter sei angenommen, dass 0.5% der Gesamtbevölkerung effektiv an Krebs leiden. Herr Weber unterzieht sich diesem Test und sein Arzt teilt ihm mit, dass der Test bei ihm Krebs diagnostiziert hat. Die Frage lautet: Wie bestürzt soll Herr Weber über dieses Resultat sein?

Die Antwort ist erstaunlich: Herr Weber darf vorsichtig optimistisch sein.

Mit einem Baumdiagramm soll der obige Sachverhalt visualisiert werden.

Abb. 43: Baumdiagramm Test auf Krebs (erster Test)



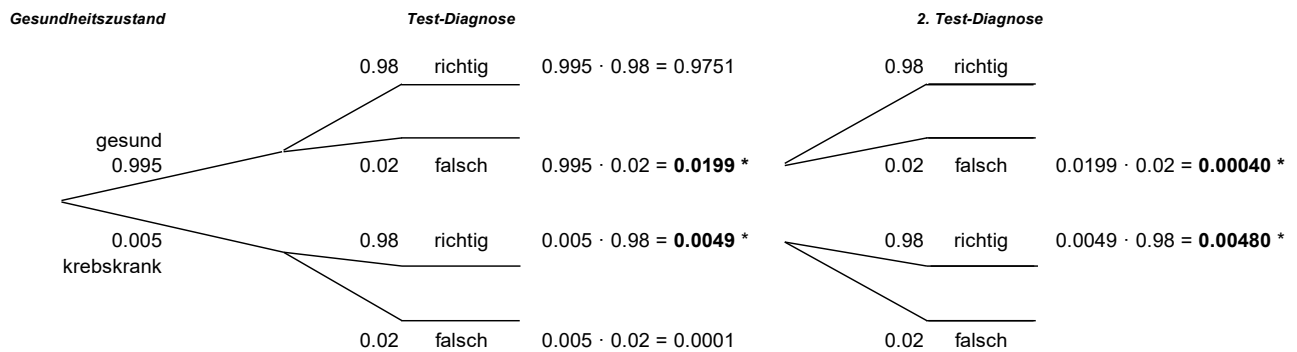
Die hervorgehobenen und mit Sternzeichen versehenen zwei Wahrscheinlichkeiten markieren diejenigen Ereignisse, bei denen das Testverfahren Krebs diagnostiziert, insgesamt also bei $0.0199 + 0.0049 = 0.0248$ oder 2.48% der vorgenommenen Tests. Davon werden aber **nur 19.76%** ($0.0049 / 0.0248 = 0.1976$) **der Fälle richtig diagnostiziert**. Diese Wahrscheinlichkeit ist bedeutend geringer als die in den Annahmen aufgeführte bedingte Wahrscheinlichkeit von 98%, bzw. der Wahrscheinlichkeit, dass jemand als krebkrank diagnostiziert wird, vorausgesetzt er ist auch wirklich krebkrank.

Aufgrund der obigen Ausführungen ist es klar, weshalb bei folgeschweren Diagnosen (z.B. beim HIV-Test) mindestens ein zweiter Test vorzunehmen ist, bevor der Patient über das Resultat informiert wird.

Würde im obigen Beispiel bei denjenigen Patienten, die beim (ersten) Testverfahren als krebkrank diagnostiziert wurden, ein zweiter Test vorgenommen, ergäbe dies folgendes, erweitertes, nur noch die relevanten Ereignisse darstellendes Baumdiagramm:

¹⁰⁵ Auf eine mathematische Formulierung des Bayes Theorems wird hier verzichtet. Diese ist z.B. bei BOHLEY, ⁶1996, S. 326ff. und SPIEGEL, 1975, 1980, S. 9 + 20f. sowie SPIEGEL, 1972, S. 121. aufgeführt.

¹⁰⁶ siehe auch PAULOS, 1988, 1990, S. 66.

Abb. 44: Baumdiagramm Test auf Krebs (zweiter Test)

Die ganz rechts aussen hervorgehobenen und mit Sternzeichen versehenen zwei Wahrscheinlichkeiten markieren diejenigen Ereignisse, bei denen sowohl das erste als auch das zweite Testverfahren Krebs diagnostizierte, insgesamt also bei $0.00040 + 0.00480 = 0.00520$ oder 0.52%. Davon werden aber **nun neu 92.3%** ($0.00480 / 0.00520 = 0.923$) **der Fälle richtig beurteilt**.

6.4 Strategie-Entscheid und Unsicherheit

6.4.1 Darstellung an einem einfachen Beispiel eines Gemüsehändlers

6.4.1.1 Ausgangslage und Fragestellung

Ein Gemüsehändler¹⁰⁷ kauft jeden Tag frisches Gemüse ein, das ihn pro Kiste CHF 40.00 kostet. (Er kann nur in ganzen Kisten einkaufen.) Sein Verkaufspreis von CHF 100.00 pro Kiste liegt gleich hoch wie der seiner grössten Konkurrenten. Seine Kunden sind vor allem die Bewohner der nahegelegenen Alterssiedlung; die Kunden kommen zuerst zu ihm, bevor sie zu den weiter weg gelegenen Konkurrenten gehen. Das ihm verbleibende Gemüse am Ende des Tages schenkt er der Heilsarmee. Der Gemüsehändler kann aufgrund von Aufzeichnungen über seine Absatzmengen ermitteln, dass er durchschnittlich rund zwei Kisten Gemüse pro Tag verkauft hat. Daraus berechnet er sich folgende Nettoeinnahmen (entspricht ungefähr dem Bruttogewinn):

$$\begin{array}{rclclcl} \text{durchschnittliche} & & \text{durchschnittliche} & & \text{durchschnittliche} \\ \text{Nettoeinnahmen} & = & \text{Verkaufseinnahmen} & - & \text{Einkaufsausgaben} \\ \\ \text{CHF 120.00} & = & 2 \cdot \text{CHF 100.00} & - & 2 \cdot \text{CHF 40.00} \end{array}$$

Aufgrund dieser Berechnung sollte er also durchschnittliche Nettoeinnahmen von CHF 120.00 pro Tag erarbeiten. Wenn er aber seine vergangenen Nettoeinnahmen zusammenrechnet, kommt er auf einen Durchschnitt, der bedeutend kleiner ist als CHF 120.00. Er fragt sich deshalb einerseits, weshalb es überhaupt eine Differenz zwischen der obigen Berechnung und seinen effektiven, durchschnittlichen Nettoeinnahmen geben kann und andererseits, ob es ökonomisch sinnvoll ist, seine Einkaufsstrategie bei zwei Kisten pro Tag zu belassen.

6.4.1.2 Abschätzen der Zukunft mit Daten aus der Vergangenheit

Sicherheit existiert, wenn die Zukunft gewiss ist, also ein bestimmter Umweltzustand mit 100%iger Wahrscheinlichkeit eintritt. Die Zukunft selbst ist aber immer ungewiss; kein Mensch weiss, wie sie wirklich ausfallen wird. Man kann die tatsächlich eintretenden Umweltzustände nie (auch durch noch so genau Rechenverfahren) vorwegnehmen. Die Unsicherheit der Zukunft bleibt immer bestehen.

¹⁰⁷ siehe auch HORNGREN, 1965, ⁵1981, S. 436ff. und TREYER, 1984, S. 9-12.

Was man aber versuchen kann, ist die gegenwärtig bekannten, zukünftigen Unsicherheiten in die zu fällende, heutige Entscheidung mit einfließen zu lassen. Man versucht somit aufgrund von Erfahrungen aus der Vergangenheit, mathematischen Beweisen, aber auch persönlichen (subjektiven) Schätzungen, die Zukunft (bzw. die möglichen Umweltzustände) abzuschätzen (siehe auch die Ausführungen in Kapitel 6.2).

Man bemüht sich, mögliche Umweltzustände der Zukunft zu definieren und versucht, ihnen mögliche Eintrittswahrscheinlichkeiten zuzuordnen. Dabei wird nichts anderes als eine Trendextrapolation durchgeführt (d.h. wenn schon in der Vergangenheit z.B. die Gemüseverkäufe in einem gewissen Bereich geschwankt haben, werden diese Schwankungen auch in der Zukunft höchstwahrscheinlich auftreten), die um allfällige, voraussehbare Strukturbrüche (z.B. Änderung in den Essgewohnheiten, in der Mode usw.) korrigiert wird:

Aufgrund von Aufzeichnungen der Verkaufsumsätze in der Vergangenheit ist eine Spannweite feststellbar, innerhalb der sich die Umsätze bewegten. Weiter kann man diesen Aufzeichnungen entnehmen, wie häufig der Umsatz bei einer bestimmten Höhe aufgetreten ist. Technisch wird folgendermassen vorgegangen: die Spannweite unterteilt man in gleich grosse Klassen und zählt die Anzahl Verkaufsumsätze innerhalb der jeweiligen Klasse. Daraus lässt sich die Verteilung des zukünftigen Umsatzes, d.h. der Eintrittswahrscheinlichkeiten des jeweiligen Umsatzes, bestimmen. Diese Verteilung trifft aber nur dann zu, wenn sich die Grundgegebenheiten bzw. die Annahmen über Bestimmungsfaktoren und/oder Umweltzustände in der Zwischenzeit nicht ändern.

Der in der Zukunft dann tatsächlich eintretende Umweltzustand kann ein x-beliebiger sein. Nur wenn man unendlich viele Male wieder von neuem und unter denselben Bedingungen beginnen könnte, würde sich in etwa eine Verteilung ergeben, wie sie aufgrund der obigen Schätzungen ermittelt wurde.

6.4.1.3 Lösungsansatz

Zuordnung 'Unsicherheitsprofil'

Der Gemüsehändler muss versuchen, der Nachfrage nach Gemüse ein '**Unsicherheitsprofil**' zuzuordnen, wobei er bestrebt sein sollte, alle von ihm nicht beeinflussbaren Veränderungen in deren möglichen Ausmassen mit zu berücksichtigen. Da der Gemüsehändler keine wesentlichen Veränderungen in der Zukunft erwartet, ermittelt er die folgenden subjektiven Wahrscheinlichkeiten für bestimmte Nachfragesituationen aufgrund der Daten aus der Vergangenheit. Dabei müssen gewisse Klassen gebildet werden (hier z.B. ganze Kisten), um die Schätzung technisch zu ermöglichen.

Nachfrage in Kisten	0	1	2	3	4	5 oder mehr	Total
Anzahl der Vorkommnisse in der Vergangenheit	10	40	80	50	20	keine	200
Subjektive Eintrittswahrscheinlichkeiten	0.05	0.20	0.40	0.25	0.10	0.00	1.00

Da nun der Gemüsehändler nicht weiss, wann genau die einzelnen Umweltzustände (Nachfrage) eintreten, kann er nicht schon im Voraus die entsprechenden Alternativen (Einkauf) ergreifen. Es ist ihm also nicht möglich, wie folgt vorzugehen: wenn er wüsste, dass er morgen z.B. vier Kisten verkaufen könnte, würde er auch vier Kisten einkaufen. Es stehen ihm also nicht nur eine, sondern grundsätzlich fünf Alternativen (Einkauf) offen, was zusammen mit grundsätzlich fünf Umweltzuständen (Nachfrage) 25 Kombinationen ergibt. Da in diesem Beispiel die Nachfrage von '5 oder mehr' Kisten an Gemüse nie eingetreten ist und der Gemüsehändler somit diesem möglichen Umweltzustand eine subjektive Eintrittswahrscheinlichkeit von Null zuordnet, reduzieren sich die Alternativen und Umweltzustände auf je 5 bzw. auf 25 Kombinationen.

Ergebnistabelle und Erwartungswert

Die folgende **Ergebnistabelle**¹⁰⁸ zeigt dem Gemüsehändler, wie viele Nettoeinnahmen in CHF er jeweils (bei einer bestimmten Kombination von Einkauf und Nachfrage) erwirtschaftet. Kauft er z.B. nur Gemüse ein, ohne welches zu verkaufen, hat er Nettoausgaben in der Höhe von CHF 40.00 pro Kiste; verkauft er nun aber auch noch, so erwirtschaftet er sich durch den Verkauf von jeder Kiste CHF 100.00 (abzüglich der Ausgaben von CHF 40.00).

Abb. 45: Ergebnistabelle über Nettoeinnahmen des Gemüsehändlers

Subjektive Eintrittswahrscheinlichkeiten	5%	20%	40%	25%	10%	100%
Umweltzustände (Nachfrage in Kisten) Alternativen (Einkauf in Kisten)	0	1	2	3	4	Erwartungswert
0	0	0	0	0	0	0
1	-40	60	60	60	60	55
2	-80	20	120	120	120	90
3	-120	-20	80	180	180	85
4	-160	-60	40	140	240	55

Da nun die einzelnen Umweltzustände (Nachfrage) - gemäss der Schätzung des Gemüsehändlers - nicht alle mit gleich grosser subjektiver Wahrscheinlichkeit eintreten werden, sind auch die einzelnen Nettoeinnahmenbeträge in CHF auf der gleichen Zeile nicht 'gleichwertig'. Um einen Strategie-Entscheid unter den vier möglichen Alternativen (Einkauf) fällen zu können, ist pro Alternative (Einkauf) der gewichtete Durchschnitt der Nettoeinnahmen in CHF (**Erwartungswert**¹⁰⁹) zu berechnen, indem die einzelnen Nettoeinnahmen mit den zugehörigen subjektiven Eintrittswahrscheinlichkeiten multipliziert und über die ganze Zeile hinweg addiert werden (siehe letzte Spalte rechts in der Ergebnistabelle). Der Erwartungswert der Nettoeinnahmen bei der Alternative 'drei Kisten einkaufen' berechnet sich z.B. wie folgt: $-120 \cdot 0.05 + -20 \cdot 0.20 + 80 \cdot 0.40 + 180 \cdot 0.25 + 180 \cdot 0.10 = 85$

Nachdem alle Erwartungswerte der Nettoeinnahmen pro Tag für die vier Alternativen (Einkauf) ausgerechnet worden sind, ist ersichtlich, dass sich der maximale Erwartungswert (CHF 90.00) bei der Alternative 'Einkauf von zwei Kisten', ergibt (siehe schattiertes Feld). Bei der Verwendung des Erwartungswertes als Entscheidungskriterium wird davon ausgegangen, dass sich der Entscheidungsträger risikoindifferent verhält. Wenn aber das Entscheidungskriterium 'Risikoaversion' für den Gemüsehändler gelten würde, müsste diejenige Alternative gewählt werden, welche die kleinste Standardabweichung oder den kleinsten Variationskoeffizienten aufweist. Im obigen Beispiel wäre dies bei der Alternative 'Einkauf von einer Kiste' der Fall. Dabei wird die Alternative 'Einkauf von keiner Kiste' als nicht betriebswirtschaftlich sinnvoll ausser Betracht gelassen.

Da aber der Gemüsehändler seine Nettoeinnahmen maximieren möchte, ist es sinnvoll, den maximalen Erwartungswert als Zielgrösse zu nehmen. Es ist dies eine 'mittlere' Lösung aus dem Dilemma, dem sich der Gemüsehändler gegenübergestellt sieht: Wenn er viele Kisten Gemüse einkauft, sie aber nicht verkaufen kann, hat er grosse Nettoausgaben. Dementsprechend erwirtschaftet er aber auch grosse Nettoeinnahmen, wenn er die vielen eingekauften Gemüse wieder verkaufen kann. Kauft er hingegen nur wenige Kisten Gemüse ein, ohne sie zu verkaufen, hat er zwar nur geringe Nettoausgaben, kommt aber auch nur zu geringen Nettoeinnahmen, wenn die Nachfrage grösser ist, als er zum Verkauf eingekauft hat.

¹⁰⁸ contingency table

¹⁰⁹ expected value

Dieser maximale Erwartungswert von CHF 90.00 entspricht auch nicht den anfänglich genannten CHF 120.00. Letztere können nur eintreten, wenn der Gemüsehändler immer zwei Kisten verkaufen würde. Dies ist aber nur in 40% der Fälle zutreffend, während in 25% der Fälle der Gemüsehändler weniger Kisten verkauft und dabei weniger Nettoeinnahmen bzw. sogar Nettoausgaben erwirtschaftet bzw. hinnehmen muss. Bei der Berechnung des Erwartungswertes wird dieser Umstand berücksichtigt, nicht aber bei der einleitenden 'Durchschnittsberechnung'.

6.4.1.4 Strategie-Entscheid / Beantwortung der Fragestellung

Zurückkommend auf die ursprüngliche Fragestellung, müsste diese wie folgt beantwortet werden: Mit der Vorgabe 'durchschnittliche Absatzmenge von zwei Kisten' hat der Gemüsehändler bei seiner Berechnung die Nettoeinnahmen so ermittelt, wie wenn die Verkaufseinnahmen und Einkaufsausgaben immer eintreten würden, was in sich selbst ein Widerspruch ist, da es ja eben Durchschnitte sind. Er hätte versuchen sollen, die *Streuung* seiner Absatzmengen und deren Wahrscheinlichkeiten abzuschätzen, um eine aussagekräftigere Prognose der Nettoeinnahmen zu ermitteln. Aufgrund der obigen Ergebnistabelle ist ersichtlich, dass der grösste Erwartungswert der Nettoeinnahmen bei der Einkaufsstrategie von zwei Kisten pro Tag erreicht wird. Es ist also weiterhin sinnvoll diese Strategie zu verfolgen.

6.4.2 Problemstellung aus einem Industriebetrieb

6.4.2.1 Ausgangslage

Ein Unternehmen steht einem unregelmässig schwankenden Absatz gegenüber (Umweltzustände). Da man nicht auf Lager produzieren kann, muss die Unternehmensleitung versuchen, ihre Produktion (Alternativen) so festzulegen, dass für das Unternehmen - trotz der Unsicherheit des Absatzes - eine optimale Abstimmung von Produktion und Absatz erreicht wird.

Die Klarient AG¹¹⁰ produziert eine nur kurzfristig beständige biologische Substanz, die, falls sie nicht innerhalb des Herstellmonats verkauft wird, vernichtet werden muss. Die Vernichtungskosten sind vernachlässigbar.

Die variablen Herstellkosten der chemischen Verbindung sind CHF 22.00 pro Mengeneinheit, der Verkaufspreis beträgt CHF 40.00 pro Mengeneinheit. Dieses Produkt kann auch von einem Zweigbetrieb eines Konkurrenzunternehmens bezogen werden. Der Kaufpreis der Fertigprodukte würde CHF 40.00 pro Mengeneinheit betragen, zuzüglich CHF 6.00 pro Mengeneinheit Transportkosten. Man schätzt, dass durch eine Nichtlieferung des Produktes 90% der Kundschaft verlorengehen würde. Deshalb sollen in jedem Falle alle Bestellungen an die Klarient AG von dieser erfüllt werden. Die Absatzmengen des Produktes der letzten 40 Verkaufsmonate haben stark geschwankt. Ein bestimmter Trend in den Verkaufszahlen kann nicht festgestellt werden.

Abb. 46: Absatzmengen der Klarient AG

verkaufte Mengeneinheiten pro Monat	Anzahl Monate
3'000	8
4'000	20
5'000	12
	40

¹¹⁰ siehe auch DOPUCH, BIRNBERG, DEMSKI, 1969, ²1974, S. 162. und TREYER, 1984, S. 18-19.

6.4.2.2 Lösungsansatz

Zuordnung 'Unsicherheitsprofil'

Zuerst müssen die Absatzwahrscheinlichkeiten für 3'000, 4'000 und 5'000 Mengeneinheiten pro Monat aufgrund der Vergangenheitszahlen bestimmt werden (siehe Verkaufszahlen der Klarient AG im letzten Kapitel). Diese Wahrscheinlichkeiten können als subjektive Eintrittswahrscheinlichkeiten übernommen werden und betragen für die 3'000, 4'000 und 5'000 verkaufte Mengeneinheiten pro Monat 20% (8/40 Monate), 50% (20/40 Monate) und 30% (12/40 Monate).

Ergebnistabelle und Erwartungswert

Die Unternehmensleitung wünscht, dass die Deckungsbeiträge maximiert werden. Diese Erfolgsgrösse müsste, je nach Fristigkeit der Entscheidungswirkung und Zielsystem, durch eine andere ersetzt werden (z.B. Cash-flow, Gewinn usw.)

Die Unternehmensleitung kann auf die drei Umweltzustände (Absatzmengen) durch drei Alternativen (Produktionsmengen) reagieren. Wüsste sie, wann die Absatzmengen eintreten werden, könnte sie auch genau mit der entsprechenden Produktionsmenge reagieren. Dies ist aber bei der Klarient AG gerade nicht der Fall; die Unternehmensleitung weiss nicht, wann und welche Absatzmenge verkauft wird. Sie sieht sich also einem Feld von 9 (= 3 • 3) Kombinationen gegenüber.

In der untenstehenden **Ergebnistabelle** über Deckungsbeiträge werden die drei Alternativen (Produktionsmengen) den drei Umweltzuständen (Absatzmengen) gegenübergestellt. Sie enthält die dem Unternehmen zufließenden Deckungsbeiträge in CHF für jedes Kombinationsfeld.

Abb. 47: Ergebnistabelle Deckungsbeiträge der Klarient AG

Subjektive Eintrittswahrscheinlichkeiten	20%	50%	30%	100%
Umweltzustände (Absatzmengen)	3'000	4'000	5'000	Erwartungswert
Alternativen (Produktionsmengen)				
3'000	54'000.00	48'000.00	42'000.00	47'400.00
4'000	32'000.00	72'000.00	66'000.00	62'200.00
5'000	10'000.00	50'000.00	90'000.00	54'000.00

Berechnungserklärungen (ein paar Beispiele):

$$\begin{array}{lcl} \text{Deckungsbeitrag} & & \text{Absatzerlös} \\ 54'000.00 & = & 3'000 \cdot 40.00 \\ & & - \text{variable Herstellkosten} \\ & & 3'000 \cdot 22.00 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{Deckungsbeitrag} & & \text{Absatzerlös} \\ 32'000.00 & = & 3'000 \cdot 40.00 \\ & & - \text{variable Herstellkosten} \\ & & 4'000 \cdot 22.00 \end{array}$$

$$\begin{array}{lclcl} \text{Deckungsbeitrag} & & \text{Absatzerlös} & & \text{variable Herstellkosten} & & \text{variable Zukaufskosten}^*) \\ 66'000.00 & = & 5'000 \cdot 40.00 & - & 4'000 \cdot 22.00 & - & 1'000 \cdot 46.00 \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \text{Erwartungswert} & & \\ \text{Deckungsbeitrag} & & \\ 47'400.00 & = & 54'000.00 \cdot 0.20 + 48'000.00 \cdot 0.50 + 42'000.00 \cdot 0.30 \end{array}$$

*) Die variablen Zukaufskosten entstehen nur, weil die Unternehmensleitung keinen Kundenverlust von 90% hinnehmen will. Sie setzen sich aus dem Kaufpreis und den Transportkosten zusammen.

Den einzelnen Umweltzuständen können nun die subjektiven Eintrittswahrscheinlichkeiten zugeordnet werden. Da die Unternehmensleitung die Deckungsbeiträge maximieren will, kann die Masszahl **Erwartungswert** (gewichtete Deckungsbeiträge pro Alternative) als gute Entscheidungsgrundlage dienen. Sie besagt, dass, wenn unendlich viele Male die Entscheidung - bei gleichen Voraussetzungen - wiederholt würde, ein durchschnittlicher Deckungsbeitrag in der Höhe des Erwartungswertes erreicht würde.

Falls keine Informationen bezüglich subjektive Eintrittswahrscheinlichkeiten vorhanden sind und/oder wenn der Entscheidungsträger generell eine pessimistische Einstellung hat, sollte der Entscheidung nach dem sogenannten '**Minimax-Prinzip**' gefällt werden. Dabei geht der Entscheidungsträger davon aus, dass er ein 'Pechvogel' ist, und er somit pro Alternative immer den schlechtesten Umweltzustand antreffen wird. Da er aber ökonomisch denkt, wählt er nun diejenige Alternative, welche das beste Resultat der schlechtesten Umweltzustände aufweist.

Im vorliegenden Fall sind für die Alternativen 3'000 bzw. 4'000 und 5'000 folgende Ergebnisse die schlechtesten: 42'000.00 bzw. 32'000.00 und 10'000.00. Das beste dieser schlechtesten Ergebnisse ist 42'000.00 und tritt bei der Alternative 3'000 Produktionsmenge ein.

6.4.2.3 Strategie-Entscheid

Der maximale Erwartungswert (= CHF 62'200.00) wird bei der Alternative: Produktion von 4'000 Mengeneinheiten, erreicht. Aufgrund dieser Berechnungen wird die Unternehmensleitung beschliessen, eine Produktion von 4'000 Mengeneinheiten vorzunehmen, um einen maximalen Zielerreichungsgrad (Deckungsbeitrag) bei den vorhandenen Schwankungen des Absatzes zu erreichen.

6.4.3 Quintessenz

Ohne das Wissen der Vergangenheit ist eine Voraussage unmöglich; ohne ein Interesse an der Zukunft ist das Wissen der Vergangenheit fruchtlos.¹¹¹ Jeder Entscheid wird im Grunde für die Zukunft gefällt. Um einen rationalen Entscheid fällen zu können, muss man eine Prognose der Zukunft wagen. Dies ist aber nur sinnvoll, wenn die Erfahrung aus der Vergangenheit mit einbezogen wird. Die Vergangenheit ist umgekehrt nur von Nutzen, wenn sie mehr Erkenntnisse für die Zukunft ermöglicht. Indem man Alternativen (aufgrund der bestehenden Informationen) formuliert und versucht, sich über die Chancen ihres Eintritts klar zu werden, versucht man der Vergangenheit mehr Informationen für die Zukunft abzugewinnen und die uns schon bekannten Ungewissheiten der Vergangenheit der Zukunft 'weiter zu verrechnen'. Die Zukunft selbst bleibt dabei weiter ungewiss, nur werden bekannte bzw. abschätzbare Ungewissheiten schon zum Voraus offengelegt, damit aufgrund dieser Einsicht rationalere Entscheidungen getroffen werden können.

Nicht nur wir Menschen sind Schwankungen (psychischer Art) unterworfen, auch viele Zielvorstellungen werden ganz unterschiedlich erreicht. Aufgrund dieser Tatsache ist es zwecklos, bei der Entscheidungsfindung so zu tun, wie wenn das Ziel bzw. die Zukunft nur einen Wert annehmen könnte. Durch die Schätzung von subjektiven Wahrscheinlichkeiten kommt man der Wirklichkeit dadurch näher, dass man aufgrund der Erfahrung aus der Vergangenheit und unter Berücksichtigung eventueller Strukturbrüche versucht, einen Zielerreichungsspielraum abzuschätzen. Auch wenn diese Methode nicht immer zu neuen Entscheidungen führt, so hat sie gegenüber den sonst üblichen, einwertigen Zielerreichungsvorstellungen den Vorteil, dass sie den Entscheidungsträger zwingt, das Problem zu strukturieren, zu analysieren und die schon vorhandenen Unsicherheiten mit den daraus folgenden Konsequenzen zu quantifizieren. Durch diese 'vertiefte' Erfassung der Problematik ist in jedem Falle eine fundiertere Entscheidung sicher.

¹¹¹ FASB, 1980, S. xi.

6.5 Perfekte Information und deren Wert¹¹²

Wenn nun der Gemüsehändler von Kapitel 6.4.1 zu einem Berater geht und ihn fragt, ob es sich nicht lohnen würde, für eine genauere Erfassung bzw. Abschätzung der Unsicherheiten Geld auszugeben (z.B. via Marktforschung usw.), könnte dieser ihm wie folgt antworten: Wenn der Gemüsehändler durch diese Untersuchung erreichen könnte, dass es für ihn keine Unsicherheit mehr gäbe bzw. dass er jeden Tag genau wüsste, wie gross die Nachfrage (Umweltzustand) sein würde, und er dementsprechend 'sicher' einkaufen könnte (Alternative), sähe seine Nettoeinnahmen-Matrix in CHF wie folgt aus:

Abb. 48: Nettoeinnahmen-Matrix Gemüsehändler (ohne Unsicherheit)

Objektive Eintrittswahrscheinlichkeiten	5%	20%	40%	25%	10%	100%
Umweltzustand (Nachfrage in Kisten entspricht Alternative (Einkauf in Kisten)	0	1	2	3	4	Erwartungswert
Nettoeinnahmen	0	60	120	180	240	129

Wenn diese Nettoeinnahmen in CHF mit ihren nun objektiven Eintrittswahrscheinlichkeiten gewichtet werden, so ergibt dies einen Erwartungswert von CHF 129.00 pro Tag. Dieser Betrag entspricht dem maximalen, durchschnittlichen Wert an Nettoeinnahmen, den der Gemüsehändler bei perfekter Information (also Sicherheit) erhalten könnte. Es muss immer noch der Erwartungswert (gewichteter Durchschnitt) ausgerechnet werden, weil die Nachfrage immer noch schwankt (entsprechend den objektiven Eintrittswahrscheinlichkeiten); die Anpassung des Einkaufs kann aber dank der perfekten Information sofort erfolgen.

Der Berater könnte dem Gemüsehändler also sagen, dass er maximal CHF 39.00 pro Tag ausgeben dürfe, um eine genauere Abschätzung der Unsicherheit zu erhalten. Diese CHF 39.00 pro Tag setzen sich zusammen aus dem Erwartungswert der Nettoeinnahmen pro Tag bei perfekter Information (CHF 129.00) minus den Erwartungswert bei Unsicherheit (CHF 90.00). In Wirklichkeit wird der Gemüsehändler aber nicht bereit sein, CHF 39.00 pro Tag für zusätzliche Informationen zu bezahlen, da perfekte Information nie, auch nicht durch noch so intensive Forschung, erreicht werden kann.

6.6 Verhaltensänderung und Unsicherheit

Im Gegensatz zu Kapitel 6.4 geht es hier nicht um die Maximierung einer Zielgrösse, sondern um die Erklärung einer Verhaltensänderung aufgrund sich ändernder Wahrscheinlichkeiten. Anhand eines Beispiels soll diese Problematik näher erläutert werden.

6.6.1 Ausgangslage und Fragestellung

¹¹³Als Geschäfts- oder Ferienreisender kann man häufig in die folgende missliche Lage kommen: Obwohl man sein Hotelzimmer im Voraus reserviert und dafür sogar eine Reservationsgebühr bezahlt hat, ist das Hotel, wenn man es todmüde endlich erreicht, schon voll besetzt. Der Geschäfts- oder Ferienreisende stellt sich notgedrungen folgende Frage: Unter welchen Bedingungen lohnt es sich für einen Hotelbesitzer, Reservationen für Zimmer entgegenzunehmen und diese dann trotzdem an neue Gäste zu vergeben?

¹¹² siehe auch BERENSON, LEVINE, 1986, ⁷1999, S. 269.

¹¹³ siehe auch TREYER, 1984, S. 22-23.

Angenommen die Reservationsgebühr beträgt CHF 10.00, eine Übernachtung kostet CHF 120.00, wobei die Reservationsgebühr nicht angerechnet wird. Wenn eine gültige Reservation vom Hotel nicht eingelöst werden kann - weil das Hotel das Zimmer schon weiter vergeben hat, obwohl es reserviert war - übernimmt das Hotel für den reservierenden Gast die Kosten für eine Übernachtung in einem gleichwertigen Nachbarhotel als 'Wiedergutmachung'. Dank einem Spezialarrangement unter den Hotelbesitzern verrechnen sie sich gegenseitig bei Fremdunterbringungen CHF 100.00. Es wird davon ausgegangen, dass im Hotel nur einmal übernachtet wird und dass durch die Gratis-Unterbringung die Kundschaft nicht verärgert wird. Der Hotelbesitzer möchte seine Nettoeinnahmen maximieren. Unter der Annahme, dass sämtliche anderen Kosten des Hotels Bereitschaftskosten bzw. fix sind, entspricht dies der Maximierung des Deckungsbeitrages.

6.6.2 Darstellung der Ausgangslage in einer Ergebnistabelle

Auch hier kann die Ausgangslage in einer Ergebnistabelle für den Hotelbesitzer aufgestellt werden.

Abb. 49: Ergebnistabelle Nettoeinnahmen des Hotelbesitzers

Alternativen (Zimmervergabe an neue Gäste)	Umweltzustände (Nachfrage derjenigen, die schon reserviert haben)	
	JA	NEIN
JA	30.00	130.00 *
NEIN	130.00 **	10.00

Berechnungserklärungen:

30.00: Das reservierte Zimmer wurde an einen neuen Gast vergeben (Einnahmen: CHF 120.00), der Gast, der reserviert hat, ist aber erschienen (Kosten für Fremdunterbringung: CHF 100.00 minus Reservationsgebühr von CHF 10.00), was insgesamt CHF 30.00 an Deckungsbeitrag ergibt.

130.00 *: Der Gast, der reserviert hat, ist nicht erschienen (Reservationsgebühr: CHF 10.00), doch wurde das Zimmer weiter vergeben (Einnahmen: CHF 120.00), was zusammen einen Deckungsbeitrag von CHF 130.00 ausmacht.

10.00: Der Gast, der reserviert hat, ist nicht erschienen, und das Zimmer wurde nicht weiter vergeben, was einen Deckungsbeitrag von CHF 10.00 ergibt.

130.00 **: Der Gast, der reserviert hat, ist erschienen und hat das Zimmer beziehen können, was einen Deckungsbeitrag von CHF 130.00 ausmacht (Zimmer: CHF 120.00 plus Reservationsgebühr: CHF 10.00)

Unter der Annahme, dass alle leeren Zimmer reserviert wurden, steht der Hotelbesitzer vor folgenden Umweltzuständen (Nachfrage derjenigen, die schon reserviert haben): Entweder kommt der Gast, der das Zimmer reserviert hat, oder der Gast kommt nicht. Der Hotelbesitzer kann zwischen zwei Alternativen wählen: Entweder wartet er auf den Gast, der das Zimmer reserviert hat, oder er vergibt es an einen neuen Gast. Die Nachfrage nach Zimmern übersteigt in diesem Hotel das Angebot. Dass diese Auswahlmöglichkeit nicht immer gegeben ist, sei hier ausser Acht gelassen. In den vier ($2 \cdot 2 = 4$) Kombinationsfeldern sind die Deckungsbeiträge in Franken des Hotelbesitzers angegeben.

Die Ergebnistabelle zeigt, dass der Hotelbesitzer am besten abschneidet, wenn er das Zimmer auf irgendeine Art vergeben kann (dies ist ja selbstverständlich). Ein solcher Entscheidungsraum würde aber voraussetzen, dass der Hotelbesitzer selbst bestimmen könnte, welcher der Umweltzustände eintreten wird. Damit könnte er immer die optimale Alternative ergreifen.

Die Umweltzustände (Nachfrage derjenigen, die schon reserviert haben) hängen aber nicht bzw. nur sehr wenig vom Hotelbesitzer selbst ab, sondern von der Moral, dem Wetter, der Tageszeit und den Bedürfnissen der Leute, die bei ihm reserviert haben. Dem Hotelbesitzer bleibt nur die Möglichkeit, zu versuchen, die jeweiligen subjektiven Eintrittswahrscheinlichkeiten der beiden Umweltzustände abzuschätzen (siehe gleich anschliessendes Kapitel 6.6.3).

6.6.3 Lösungsansätze

Heuristisch: Ergebnistabelle mit subjektiven Eintrittswahrscheinlichkeiten

In der folgenden Tabelle wurde die Tabelle um mögliche, vom Hotelbesitzer geschätzte subjektive Eintrittswahrscheinlichkeiten erweitert.

Abb. 50: Ergebnistabellen Nettoeinnahmen des Hotelbesitzers bei Situation I, II, III

	(1-p)			(p)					
	Situation			Situation					
	I	II	III	I	II	III			
Subjektive Eintrittswahrscheinlichkeiten	20%	55%	90%	80%	45%	10%	100%	100%	100%
Umweltzustände <i>(Nachfrage derjenigen, die schon reserviert haben)</i> Alternativen <i>(Zimmervergabe an neue Gäste)</i>	JA			NEIN			Erwartungswert		
							Situation		
							I	II	III
JA	30.00			130.00			110.00	75.00	40.00
NEIN	130.00			10.00			34.00	76.00	118.00

Wenn man nun den gewichteten Durchschnitt der beiden Alternativen (Erwartungswert) berechnet (d.h. Multiplikation der Deckungsbeiträge mit einem der drei beispielhaften, subjektiven Wahrscheinlichkeiten [Situation I, II oder III] und anschliessend entlang der Zeile addiert), erhält man eine Masszahl, die dem Hotelbesitzer folgende Entscheidungshilfe gibt: Falls er bei gleichbleibenden Grundannahmen unendlich viele Male dieselbe Entscheidung (Wahl der gleichen Alternative) treffen könnte, würde er im Durchschnitt diesen Deckungsbeitrag pro Entscheidung erhalten.

Die schattierten Erwartungswerte stellen die Maxima der zugehörigen subjektiven Eintrittswahrscheinlichkeiten dar. Da der Hotelbesitzer seinen Deckungsbeitrag maximieren will, zeigen diese schattierten Erwartungswerte die für den Hotelbesitzer optimale Alternative an. Wie aus der obigen Ergebnistabelle ersichtlich, ändert sich die optimale Alternative je nachdem, welche der drei beispielhaften, subjektiven Wahrscheinlichkeitspaare ausgewählt wurden (speziell Situation I oder III). Daraus können wir sehen, dass es sich für den Hotelbesitzer in unserem Beispiel erst dann lohnt, das schon reservierte Zimmer an einen neuen Gast zu vergeben, wenn die subjektive Eintrittswahrscheinlichkeit, dass der Gast, der das Zimmer reserviert hat, nicht kommt, mehr als 45% beträgt.

Mathematischer Lösungsansatz

Die mathematisch exakte, subjektive Wahrscheinlichkeit, die eine Verhaltensänderung in der Wahl der Alternative des Hotelbesitzers bewirkt, kann durch die folgende Gleichung ermittelt werden. Dabei entspricht (p) der subjektiven Eintrittswahrscheinlichkeit, dass der Gast, der reserviert hat, nicht kommt und (1-p) der subjektiven Eintrittswahrscheinlichkeit, dass der Gast, der reserviert hat, auch wirklich kommt.

$$\begin{aligned}30 \cdot (1-p) + 130 \cdot p &= 130 \cdot (1-p) + 10 \cdot p \\30 - 30p + 130p &= 130 - 130p + 10p \\30 + 100p &= 130 - 120p \\220p &= 100 \\p &= 0.4545 \text{ oder } 45.45\%\end{aligned}$$

6.6.4 Strategie-Entscheid / Beantwortung der Fragestellung

Zurückkommend auf die Fragestellung kann für den Hotelbesitzer im obigen Beispiel folgendes gesagt werden: Wenn die subjektive Eintrittswahrscheinlichkeit, dass der Gast, der reserviert hat, kommt, grösser als etwa 45% ist, lohnt es sich für den Hotelbesitzer nicht, das reservierte Zimmer einem neuen Gast zu vergeben; ist die subjektive Wahrscheinlichkeit, dass der Gast, der reserviert hat, kommt, kleiner als etwa 45%, so lohnt es sich für den Hotelbesitzer, das reservierte Zimmer an einen neuen Gast zu vergeben.

6.6.5 Verhaltensänderung des Hotelbesitzers

Die Verhaltensänderung wird nicht durch die Reservationsgebühr beeinflusst, da wir ja nur die Fälle betrachten, wo der Gast schon ein Zimmer reserviert hat. Ausschlaggebend für die Entscheidung des Hotelbesitzers, ob er das schon reservierte Zimmer an einen neuen Gast weiter vergibt oder nicht, sind nur die Fremdunterbringungskosten und die Einnahmen aus der Übernachtung.

Kostet die Fremdunterbringung gleich viel wie die Einnahmen aus der Übernachtung, dann ist die Grenze 50%; ist die subjektive Eintrittswahrscheinlichkeit, dass der Gast, der reserviert hat, kommt, kleiner als 50%, so wird der Hotelbesitzer das Zimmer an einen neuen Gast vergeben und sonst eben nicht.

Reserviert man z.B. via Kreditkarte und besteht die Bedingung, dass man mindestens eine Nacht bezahlen muss, ob man im Hotel übernachtet oder nicht, besteht für den Hotelbesitzer gar keinen Anreiz, das Hotelzimmer an einen neuen Gast zu vergeben. Bei dieser Art der Reservation entfällt normalerweise die Reservationsgebühr.

Wird die Gratis-Fremdunterbringung als 'Wiedergutmachung' nicht offeriert, dann lohnt es sich für den Hotelbesitzer immer, das schon reservierte Zimmer an einen neuen Gast weiter zu vergeben, da er in keinem Fall mit einer Einbusse seiner Nettoeinnahmen rechnen muss. Diese Aussage gilt aber nur sehr kurzfristig. Das Modell enthält keine Berücksichtigung der Massnahmen der Gäste auf eine solche Behandlung. In Wirklichkeit werden sie sich das Nicht-Einhalten der Reservation durch das Hotel merken und nie mehr dort absteigen wollen. Zudem werden sie negative Werbung für das Hotel machen (Prestigeverlust), was langfristig zu einem Rückgang der Gästezahl für den Hotelbesitzer führt.

Je teurer die Fremdübernachtung den Hotelbesitzer zu stehen kommt, desto grösser muss die subjektive Eintrittswahrscheinlichkeit sein, dass der Gast, der reserviert hat, nicht kommt, damit es sich für den Hotelbesitzer lohnt, das Zimmer an einen neuen Gast zu vergeben.

6.7 Quintessenz

Auch bei der Lösung dieses Problems wurde ersichtlich, wie gut sich subjektive Wahrscheinlichkeiten eignen, fundiertere Entscheidungen treffen zu können. Diese subjektiven Wahrscheinlichkeiten müssen zwar immer noch geschätzt werden. In diesem Beispiel könnte diese Schätzung durch eine Stichprobenerhebung über eine gewisse Zeitspanne hinweg untermauert werden. Damit hätte der Hotelbesitzer einen groben Richtwert, den er dann je nach Wetter, Tageszeit usw. intuitiv verändern kann, um die für den jeweiligen Zeitpunkt 'richtige' subjektive Eintrittswahrscheinlichkeit zu erhalten. Dadurch ist er in der Lage, eine effizientere Entscheidung zu fällen, die nicht nur auf blosses Gutdünken zurückzuführen ist, sondern aufgrund eines logisch aufgebauten Modells mit Einbezug von 'gestrigen' Messdaten, der Zukunft aber angepasst, entstanden ist.

6.8 Repetitionsfragen

6.8.1 Terramare AG¹¹⁴

Die Firma Terramare AG ist auf den Handel mit Fischen und Schalentieren spezialisiert. Die eingekaufte Ware verkauft sie an Detailhandelsketten. Die Treuhandgesellschaft Controla steht ihr regelmässig als Unternehmensberater bei.

1. Teil

Das Unternehmen kaufte bis anhin täglich – jeweils am Morgen – Fische und Schalentiere, die an den Detailhandel weiterverkauft wurden.

Der durchschnittliche Einkaufspreis beträgt CHF 8.–/kg, der durchschnittliche Verkaufspreis CHF 12.–/kg. Die nicht verkaufte Ware wird am Abend zu CHF 2.–/kg einem lokalen Restaurant verkauft.

Übersteigt einmal die Nachfrage das Angebot der Terramare AG, so geben sich die Kunden – ohne spätere Markteinbusse – mit dem vorhandenen Angebot zufrieden.

Eine statistische Erhebung der Tagesumsätze ergab folgende, für eine (subjektive) Wahrscheinlichkeitsrechnung verwendbare Werte:

verkaufte Menge	beobachtete Verkäufe
1'000 kg	5
2'000 kg	15
3'000 kg	15
4'000 kg	10
5'000 kg	5
	50

Es werden nie weniger als 1000 kg oder mehr als 5000 kg täglich verkauft, und es kann **kein Trend in den verkauften Mengen** festgestellt werden.

- Berechnen Sie auf der anschliessend aufgeführten Matrix der täglichen Zahlungsüberschüsse – aufgrund der beobachteten Verkäufe – die täglichen Zahlungsüberschüsse für alle Kombinationsmöglichkeiten.
- Berechnen Sie den mathematischen Erwartungswert der täglichen Zahlungsüberschüsse für alle Einkaufs-Varianten.
- Schlagen Sie – aufgrund der Berechnungen unter a) und b) – der Direktion die beste Variante für die tägliche Einkaufsmenge vor.

¹¹⁴ Bücherexperten-Hauptprüfung 1984: Aufgabe Nr. 8 (1. Teil)

Berechnungs-Hilfstabelle**Matrix der täglichen Zahlungsüberschüsse**

Absatz Einkauf	1'000 kg	2'000 kg	3'000 kg	4'000 kg	5'000 kg
1'000 kg					
2'000 kg					
3'000 kg					
4'000 kg					
5'000 kg					

6.8.2 Ventilkolben-Unternehmen¹¹⁵

Ein Unternehmen, das Ventilkolben herstellt, erhält einen Auftrag eines Kunden zur Herstellung von 1'000 Spezial-Ventilkolben. Der Kunde ist bereit, CHF 120'000.00 für den Auftrag zu bezahlen. Da das Unternehmen bei der Herstellung von Spezial-Ventilkolben noch keine grosse Erfahrung hat, ist es nicht sicher, wie hoch die zusätzlichen Kosten für den oben erwähnten Auftrag ausfallen werden. Ungewissheit herrscht insbesondere bezüglich unvorhergesehenen Produktionsproblemen und nur rudimentär abschätzbaren Lernkurveneffekten.

Aufgrund von Kosten-Daten aus der Vergangenheit konnten folgende drei Szenarien bezüglich der zusätzlichen Kosten (inkl. deren Eintrittswahrscheinlichkeiten) ermittelt werden:

<u>Auftrag zur Herstellung von</u> <u>1'000 Spezial-Ventilkolben</u>	<i>zusätzliche Kosten in CHF</i>	<i>Eintritts- wahrschein- lichkeiten</i>
optimistisches Szenario	102'000.00	0.25
realistisches Szenario	114'000.00	0.45
pessimistisches Szenario	128'000.00	0.30

- Ermitteln Sie eine Ergebnistabelle bezüglich zusätzlichen Gewinns für den obenstehenden Auftrag für alle (Entscheidungs-)Alternativen und deren mögliche Umweltzustände.
- Welche (Entscheidungs-)Alternative würden Sie dem Unternehmen vorschlagen (Überlegungen / Berechnungen / Kennzahlen), wenn Sie davon ausgehen können, dass das Unternehmen den zu erwartenden, zukünftigen zusätzlichen Gewinn maximieren möchte und sich bezüglich Risikos indifferent verhält?
- Welche (Entscheidungs-)Alternative würden Sie dem Unternehmen vorschlagen (Überlegungen / Berechnungen / Kennzahlen), wenn Sie davon ausgehen können, dass das Unternehmen eine pessimistische Einstellung hat und diejenige (Entscheidungs-) Alternative auswählt, die bei Eintritt der ungünstigsten Situation zum relativ besten Ergebnis führt?
- Wegen der Unsicherheit über die zusätzlichen Kosten bezüglich des oben erwähnten Auftrages ist das Unternehmen gewillt, zusätzliche Abklärungen vorzunehmen. Welchen Betrag sollte das Unternehmen für die zusätzlichen Abklärungen maximal ausgeben und aufgrund welcher Überlegung / Berechnung / Kennziffer, wenn Sie davon ausgehen können, dass mit den Abklärungen vollkommene Transparenz der zusätzlichen Kosten bezüglich des oben erwähnten Auftrages entsteht und dadurch klar festgelegt werden kann, ob das pessimistische, realistische oder optimistische Szenario gilt.

¹¹⁵ siehe auch MAGEE, 1986, S. 37ff.

7 DISKRETE UND STETIGE ZUFALLSVERTEILUNGEN

7.1 Diskrete Zufallsverteilungen¹¹⁶

Die Kapitel 2, 3 und 5 befassten sich mit der deskriptiven Statistik, d.h. mit den Methoden des informativen Organisierens, Zusammenfassens und Darstellens von Daten. Die Fokussierung war dabei auf Sachverhalte gerichtet, die sich bereits ereignet hatten.

Mit dem letzten Kapitel über die Wahrscheinlichkeitsrechnung änderte sich die Betrachtungsweise: man begann Überlegungen anzustellen, wie ein Sachverhalt wahrscheinlich eintreten dürfte. Damit wurde der erste Schritt zu statistischen Schlussfolgerungen¹¹⁷ getan, indem auf der Basis von Beobachtungen Aussagen bezüglich der Grundgesamtheit gemacht wurden.

In diesem Kapitel geht es um Zufallsverteilungen, die den Häufigkeitsverteilungen sehr ähnlich sind, nun aber nicht mehr die Vergangenheit beschreiben, sondern die Eintrittswahrscheinlichkeit eines zukünftigen Ereignisses.

7.1.1 Einführendes Beispiel

Eine Zufallsverteilung ist eine Auflistung der auftretenden Fälle¹¹⁸ in einem 'idealtypischen Experiment' mit der Angabe der diesbezüglichen Wahrscheinlichkeiten.

Die Frage lautet nun, wie eine solche Zufallsverteilung generiert werden kann.

- Zuerst wird unterstellt, dass ein 'idealtypisches Experiment' vorliegt, d.h. dass die **Eintrittswahrscheinlichkeit der möglichen Fälle rein zufällig** ist.
- In einem zweiten Schritt wird durch logische Überlegungen ermittelt, **welche möglichen Fälle** überhaupt eintreten können.
- In einem letzten Schritt werden die **Wahrscheinlichkeiten für die auftretenden Fälle** ermittelt. Die auftretenden Fälle werden auch als Zufallsvariable¹¹⁹ bezeichnet.

Anhand des folgenden Beispiels soll das oben gesagte illustriert werden.

Angenommen das Experiment bestünde darin, dass man eine Münze mit Kopf oder Zahl auf jeder Seite zweimal nacheinander aufwerfen und man daran interessiert ist, wie viele Köpfe dabei nach oben gerichtet zu liegenden kämen und wie gross die diesbezüglichen Wahrscheinlichkeiten wären.

- Damit man überhaupt eine Aussage machen kann, müsste man unterstellen, dass die Münze 'vollkommen' ist, also rein zufällig auf die eine oder andere Seite fällt.
- Im zweiten Schritt müssen alle möglichen Fälle ermittelt werden. Die folgende Darstellung soll dies aufzeigen, wobei 'K' für 'Kopf' steht und 'Z' für 'Zahl':

Abb. 51: Mögliche Fälle eines Münzen-Experiments

mögliche Fälle	1. Wurf	2. Wurf	Anzahl Köpfe
1	Z	Z	0
2	Z	K	1
3	K	Z	1
4	K	K	2

¹¹⁶ discrete probability distributions

¹¹⁷ inferences

¹¹⁸ outcomes

¹¹⁹ random variable

Es ist festzuhalten, dass der Fall 'kein Kopf' sowie 'zwei Köpfe' je einmal auftritt, der Fall 'ein Kopf' aber zweimal.

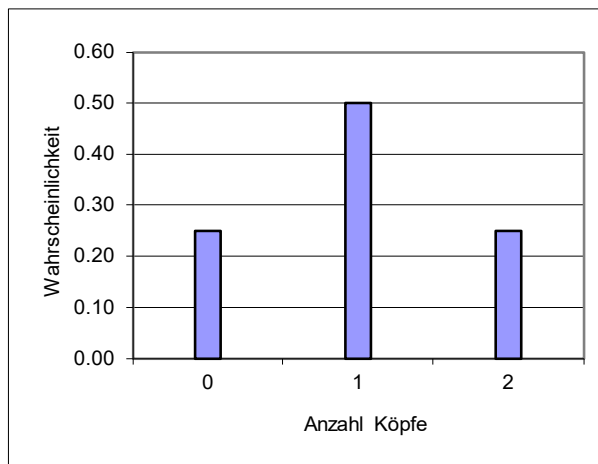
- Beim letzten Schritt sind die Wahrscheinlichkeiten der Anzahl 'Köpfe' zu ermitteln. Die Zufallsverteilung der Fälle 'kein Kopf', 'ein Kopf' und 'zwei Köpfe' sieht nun wie folgt aus:

Abb. 52: Zufallsverteilung der Anzahl 'Köpfe' des Münzen-Experiment

Anzahl Köpfe	Wahrscheinlichkeit
0	0.25
1	0.50
2	0.25

Die Zufallsverteilung der Fälle 'kein', 'ein' oder 'zwei' obenliegende 'Köpfe' beim zweimaligen Werfen einer Münze kann grafisch wie folgt dargestellt werden:

Abb. 53: Wahrscheinlichkeiten des Münzen-Experiments



7.1.2 Zwei Typen von Zufallsverteilungen

Es gibt zwei Typen von Zufallsverteilungen, nämlich die diskreten¹²⁰ und die stetigen¹²¹.

Die diskreten Zufallsverteilungen haben die Eigenschaft, dass sich **die Werte der auftretenden Fälle bzw. die Werte der Zufallsvariable klar voneinander abgrenzen**. Bei diskreten Zufallsverteilungen handelt es sich meistens um das Resultat eines Zählvorganges. Z.B. Anzahl 'Köpfe' beim Münzenwerfen, Anzahl von Kunden in einem Geschäft, usw.

Im Gegensatz dazu haben die stetigen Zufallsverteilungen die Eigenschaft, dass **die auftretenden Fälle bzw. Zufallsvariable jeden Wert innerhalb gewisser Limiten annehmen können bzw. kann**. Z.B. Luftdruck in Pneus, Distanz zwischen Ortschaften, Grösse von Menschen bzw. Bäumen, usw.

¹²⁰ discrete

¹²¹ continuous

7.1.3 Arithmetisches Mittel, Standardabweichung und Varianz einer Zufallsverteilung

Das **arithmetische Mittel einer Zufallsverteilung** wird als **Erwartungswert** (siehe Kapitel 6.4.1, 6.4.2 und 6.5) bezeichnet und berechnet sich wie folgt:

$$\mu = E(X) = \sum [x_i \cdot p(x_i)]$$

μ steht für das arithmetische Mittel [mü]

$E(X)$ steht für den Erwartungswert

x_i steht für einen Wert der auftretenden Fälle bzw. der Zufallsvariablen

$p(x_i)$ ist die relative Wahrscheinlichkeit eines x_i – Wertes

Die **Standardabweichung bzw. Varianz einer Zufallsverteilung** berechnet sich wie folgt:

$$\sigma = \sqrt{\sum [(x_i - \mu)^2 \cdot p(x_i)]}$$

$$\sigma^2 = V(X) = \sum [(x_i - \mu)^2 \cdot p(x_i)]$$

σ bzw. σ^2 steht für die Standardabweichung bzw. Varianz [sigma]

μ steht für das arithmetische Mittel [mü] bzw. den Erwartungswert $E(X)$

$V(X)$ steht für die Varianz

x_i steht für einen Wert der auftretenden Fälle bzw. der Zufallsvariablen

$p(x_i)$ ist die relative Wahrscheinlichkeit eines x_i – Wertes

7.1.4 Binomialverteilung

Die Binomialverteilung¹²² ist ein Beispiel für eine diskrete Zufallsverteilung. Sie weist folgende Eigenschaften auf:

- Es gibt **nur zwei sich gegenseitig ausschliessende auftretende Fälle bei jedem Experiment-Versuch**, nämlich 'Erfolg' oder 'Misserfolg'.
- Die auftretenden Fälle bzw. **die Zufallsvariable ist das Resultat aus der Zählung der 'Erfolge' bei einer vorgegebenen Anzahl von Versuchen**.
- Die **Wahrscheinlichkeit eines 'Erfolges' bzw. 'Misserfolges' bleibt** bei jedem Versuch **gleich** gross. Es handelt sich also um ein Experiment **mit 'zurücklegen'**.
- Die **Versuche sind unabhängig voneinander**, d.h. das Resultat eines Versuches hat keinen Einfluss auf das Resultat eines anderen Versuches.

Die Frage lautet nun, wie eine Binomialverteilung 'konstruiert' wird.

Dazu benötigen wir zwei Parameter, nämlich

- die Anzahl der Versuche und
- die (theoretische) Wahrscheinlichkeit des 'Erfolges' bei jedem Versuch.

¹²² binomial probability distribution

Die **Einzelwahrscheinlichkeit des Auftretens von x_i 'Erfolgen' der Binomialverteilung** berechnet sich wie folgt:

$$P(x_i) = \frac{n!}{x_i! \cdot (n - x_i)!} \cdot \pi^{x_i} \cdot (1 - \pi)^{n - x_i}$$

$P(x_i)$ ist die Einzelwahrscheinlichkeit des Auftretens von x_i 'Erfolgen'

x_i steht für die Anzahl des Auftretens von 'Erfolgen'

n ist die Anzahl von Versuchen

π ist die (theoretische) Wahrscheinlichkeit des 'Erfolges' bei jedem Versuch [π]

! steht für 'Fakultät' und bedeutet die Multiplikation der vorgegebenen Zahl mit der nächst kleineren ganzen Zahl bis hinunter auf 1 (definitionsgemäss ist $0! = 1$)

Beim oben aufgeführten Beispiel des zweimaligen Werfens einer Münze würde die (gerechnete) Einzelwahrscheinlichkeit des Auftretens von einem 'Kopf' wie folgt berechnet:

$$P(1) = \frac{2!}{1! \cdot (2 - 1)!} \cdot 0.5^1 \cdot (1 - 0.5)^{2 - 1} = 2 \cdot 0.5 \cdot 0.5 = 0.5$$

Ein weiteres Beispiel soll die Vorgehensweise vertiefen:

Bei einer Prüfung gäbe es vier Multiple-Choice - Fragen, bei denen jeweils vier mögliche Antworten zur Verfügung stehen und nur eine Antwort richtig ist, d.h. die (theoretische) Wahrscheinlichkeit des 'Erfolges' bei jedem Versuch beträgt 0.25.

Wie gross ist die Einzelwahrscheinlichkeit, dass rein zufällig (also ohne irgendwelches Wissen über die gestellten Fragen) kein, eine, zwei, drei oder vier Fragen richtig beantwortet würden, wobei 'r' für 'richtige Antwort' und 'f' für 'falsche Antwort' stehen soll?

Da die (theoretische) Wahrscheinlichkeit des 'Erfolges' bei jedem Versuch nicht mehr 0.50 beträgt, ist die Lösung nun nicht mehr so einfach wie unter Kapitel 7.1.1. Auch die oben aufgeführte Berechnungsformel ist sehr langwierig zu rechnen. Aus diesem Grund wurden Tabellen für Binomialverteilungen erstellt (siehe Tabellen-Sammlung, Seite 212).

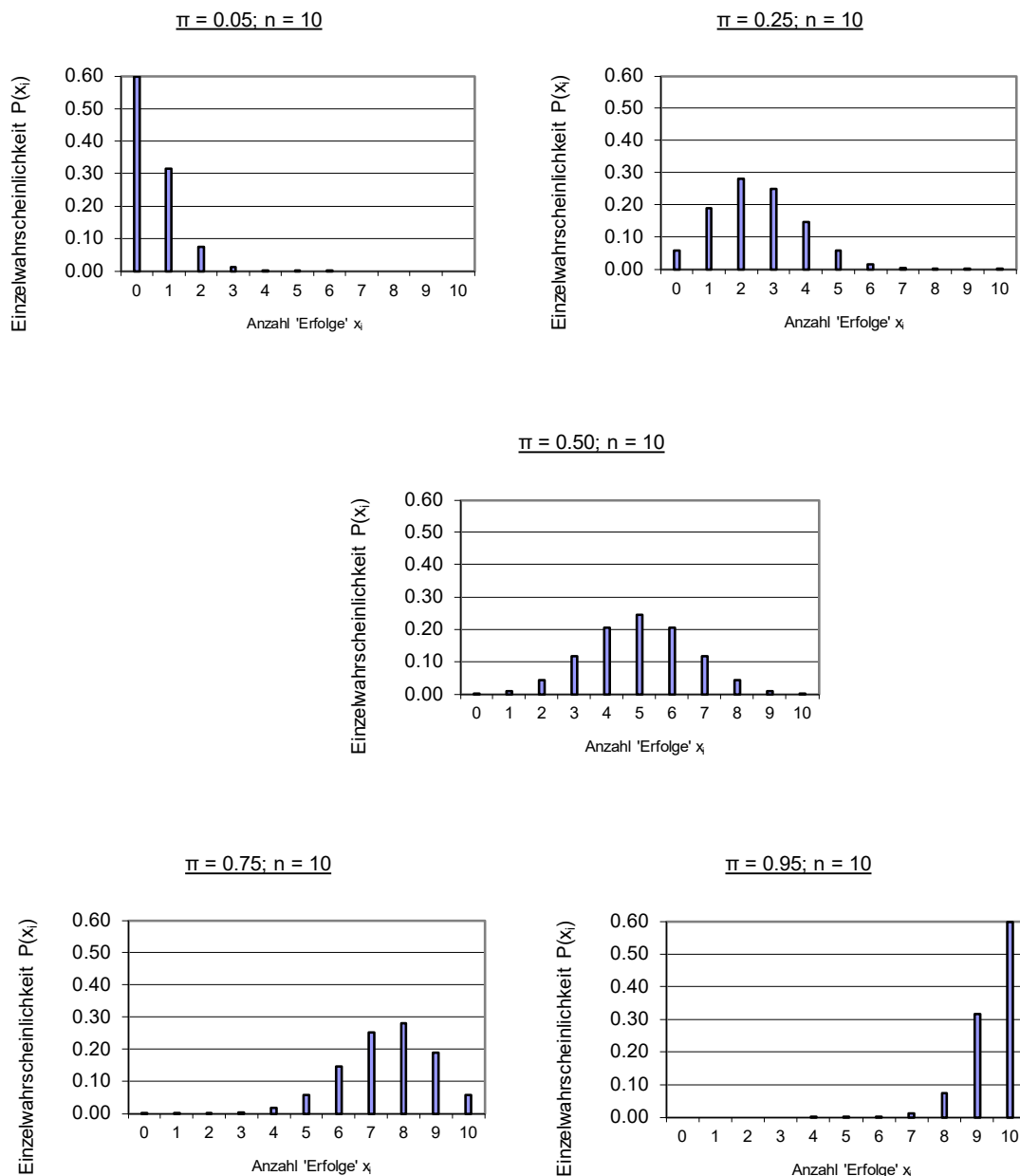
Aus der Tabelle der Binomialverteilung in der Tabellen-Sammlung (Seite 212) können für obige Fragestellung folgende Einzelwahrscheinlichkeiten herausgelesen werden (siehe 'Auszug' unten):

Aufgrund dieser Einzelwahrscheinlichkeiten kann auch die folgende Aussage gemacht werden:

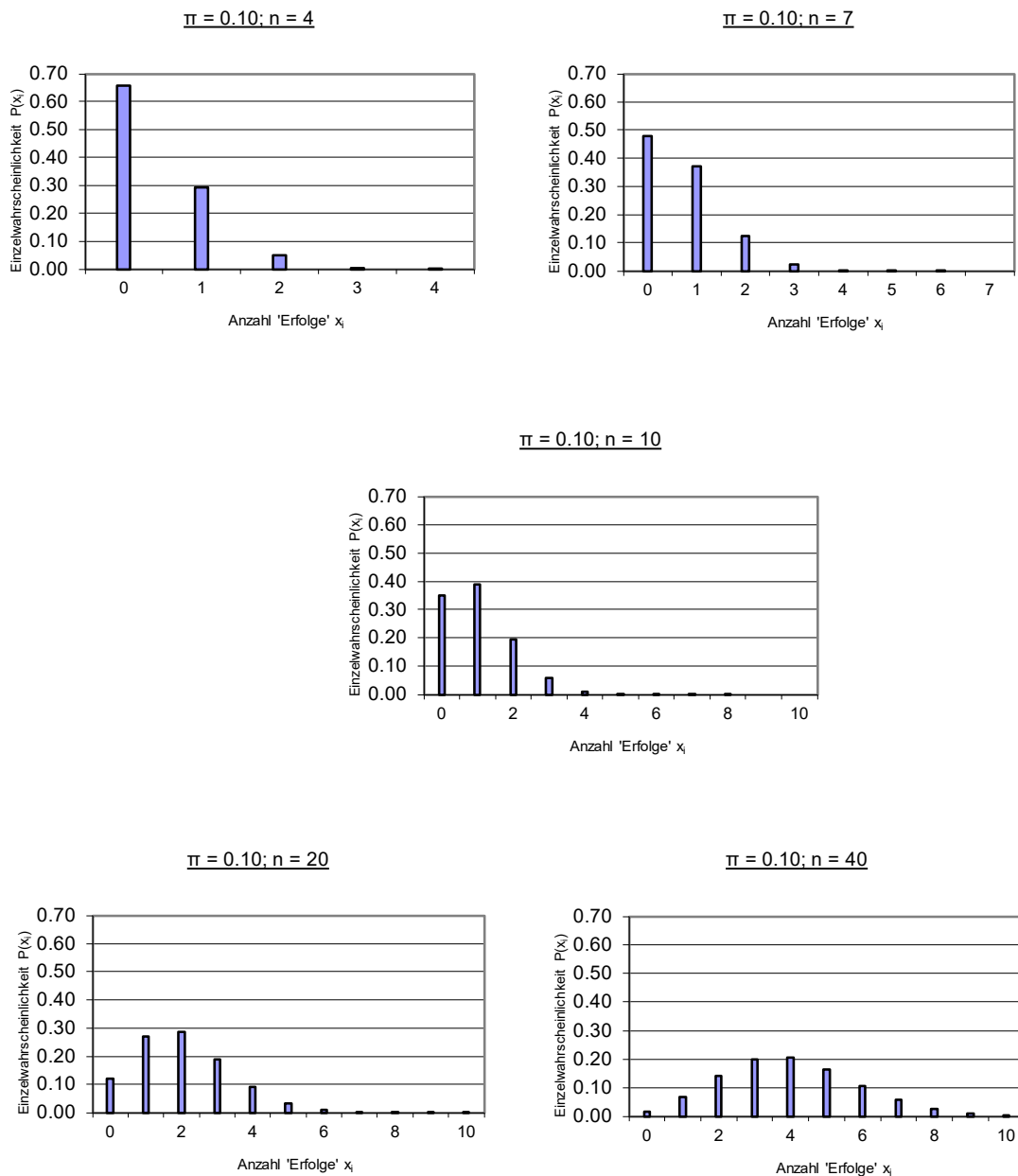
Die Wahrscheinlichkeit, dass die Hälfte und mehr Fragen rein zufällig richtig angekreuzt würden, ist nur ca. 26.2%. (= Summe der schattierten Einzelwahrscheinlichkeiten im obigen 'Auszug') und sinkt bei 10 Fragen bereits auf ca. 7.8%

In der Folge sind einige grafische Darstellungen von Binomialverteilungen aufgeführt:

Abb. 54: Ausgewählte Binomialverteilungen mit 10 Versuchen



Die obigen Darstellungen zeigen klar auf, dass die Binomialverteilung mit kleinem π eine linkssteile bzw. positive Schiefe und eine Binomialverteilung mit grossem π eine rechtssteile bzw. negative Schiefe aufweist.

Abb. 55: Ausgewählte Binomialverteilungen mit $\pi = .10$ 

Die obigen Darstellungen zeigen sehr deutlich, dass die Binomialverteilung - trotz kleinem π - mit zunehmender Anzahl von 'Erfolgen' symmetrischer wird, d.h. dass sich die Einzelwahrscheinlichkeiten der Anzahl 'Erfolge' gleichmässiger rechts und links um das arithmetische Mittel verteilen.

Das **arithmetische Mittel einer Binomialverteilung** ist sehr einfach zu berechnen, nämlich wie folgt:

$$\mu = n \cdot \pi$$

Das arithmetische Mittel der hypergeometrischen Zufallsverteilung und der Poissonverteilung (siehe nächste Kapitel) berechnen sich gleich.

Die **Standardabweichung bzw. Varianz einer Binomialverteilung** berechnet sich ebenfalls sehr einfach, nämlich wie folgt:

$$\sigma = \sqrt{n \cdot \pi \cdot (1 - \pi)}$$

$$\sigma^2 = n \cdot \pi \cdot (1 - \pi)$$

Die Varianz der hypergeometrischen Zufallsverteilung (siehe nächstes Kapitel) berechnet sich grundsätzlich gleich, wird aber durch einen sogenannten Korrekturfaktor $[(N - n) / (N - 1)]$ erweitert.

Im oben aufgeführten Beispiel der vier Multiple-Choice - Fragen mit je vier möglichen Antworten ergäbe dies

$$\mu = 4 \cdot 0.25 = 1$$

$$\sigma = \sqrt{4 \cdot 0.25 \cdot 0.75} = 0.866$$

$$\sigma^2 = 4 \cdot 0.25 \cdot 0.75 = 0.75$$

7.1.5 Hypergeometrische Zufallsverteilung

Im Gegensatz zur Binomialverteilung, bei der die Wahrscheinlichkeit eines 'Erfolges' bzw. 'Misserfolges' bei jedem Versuch gleich gross bleibt, wird bei der hypergeometrischen Zufallsverteilung¹²³ diese Einschränkung aufgehoben. Das Weglassen dieser Bedingung wirkt sich vor allem bei kleinen Grundgesamtheiten aus. Die hypergeometrische Zufallsverteilung kann zudem nur angewendet werden, wenn der Stichprobenumfang (bzw. die Anzahl der Versuche) mindestens 5% der Grundgesamtheit beträgt.¹²⁴

Die hypergeometrische Zufallsverteilung ist wiederum ein Beispiel für eine diskrete Zufallsverteilung und weist folgende Eigenschaften auf:

- Es gibt **nur zwei sich gegenseitig ausschliessende auftretende Fälle bei jedem Experiment-Versuch**, nämlich 'Erfolg' oder 'Misserfolg'.
- Die auftretenden Fälle bzw. **die Zufallsvariable ist das Resultat aus der Zählung der 'Erfolge' bei einer vorgegebenen Anzahl von Versuchen**.
- Die **Wahrscheinlichkeit eines 'Erfolges' bzw. 'Misserfolges' bleibt** bei jedem Versuch **nicht gleich** gross. Es handelt sich also um ein Experiment **ohne** 'zurücklegen'.
- Die **Versuche sind unabhängig voneinander**, d.h. das Resultat eines Versuches hat keinen Einfluss auf das Resultat eines anderen Versuches.

Die Frage lautet nun, wie eine hypergeometrische Zufallsverteilung 'konstruiert' wird.

Dazu benötigen wir drei Parameter, nämlich

- die Anzahl der Versuche bzw. die Grösse der Stichprobe,
- die Grösse der Grundgesamtheit, aus der die Versuche entnommen werden,
- die Anzahl von 'Erfolgen' in der Grundgesamtheit.

¹²³ hypergeometric probability distribution

¹²⁴ siehe MASON, LIND, MARCHAL, 1967, ¹⁰2000, S. 205.

Die **Einzelwahrscheinlichkeit des Auftretens von x_i 'Erfolgen' der hypergeometrischen Zufallsverteilung** berechnet sich wie folgt:

$$P(x_i) = \frac{\frac{S!}{x_i! \cdot (S - x_i)!} \cdot \frac{(N - S)!}{(n - x_i)! \cdot (N - S - n + x_i)!}}{\frac{N!}{n! \cdot (N - n)!}}$$

$P(x_i)$ ist die Einzelwahrscheinlichkeit des Auftretens von x_i 'Erfolgen'

x_i steht für die Anzahl des Auftretens von 'Erfolgen'

n ist die Anzahl von Versuchen bzw. die Grösse der Stichprobe

N ist die Grösse der Grundgesamtheit, aus der die Versuche entnommen werden

S ist die Anzahl von 'Erfolgen' in der Grundgesamtheit, wobei $\pi = S / N$

! steht für 'Fakultät' und bedeutet die Multiplikation der vorgegebenen Zahl mit der nächst kleineren ganzen Zahl bis hinunter auf 1 (definitionsgemäss ist $0! = 1$)

Eigentlich ist das Modell der hypergeometrischen Zufallsverteilung praxisnäher als dasjenige der Binomialverteilung, denn normalerweise zieht man Stichproben ohne Zurücklegen. Trotzdem wird die Binomialverteilung viel häufiger benutzt. Dies ist einerseits darauf zurückzuführen, dass die hypergeometrische Zufallsverteilung viel komplizierter zu berechnen ist und andererseits, **die hypergeometrische Zufallsverteilung sehr rasch gegen die Binomialverteilung konvergiert** bzw. sehr ähnliche Resultate liefert. **Man setzt die hypergeometrische Zufallsverteilung also lediglich bei kleinen Grundgesamtheiten (N) und einer Stichprobengrösse (n), die grösser als 5% der Grundgesamtheit beträgt, ein.**¹²⁵

Auch für die hypergeometrische Zufallsverteilung wurden wegen des grossen Rechenaufwandes Tabellen erstellt (siehe Tabellen-Sammlung, Seite 212f).

Anhand eines Beispiels soll die hypergeometrische Zufallsvariable illustriert werden:

Ein Unternehmen stellt fünf Maschinen her ($N = 5$). Man weiss, dass zwei der fünf Maschinen irgendeinen Defekt aufweisen ($S = 2$). Leider wurden diese defekten Maschinen nicht gekennzeichnet. Wenn man nun rein zufällig zwei Maschinen auswählt ($n = 2$), stellt sich die Frage, wie gross die Wahrscheinlichkeit ist, dass keine, eine oder beide der ausgewählten Maschinen ($x_i = 0, 1$ oder 2) einen Defekt aufweist?

Aus der Tabelle der hypergeometrischen Zufallsverteilung der Tabellen-Sammlung (Seite 212f) ist ersichtlich (siehe 'Auszug' unten), dass diese Wahrscheinlichkeiten 30%, 60% und 10% betragen.

Hypergeometrische Zufallsverteilung

Einzelwahrscheinlichkeiten /
kumulierte Wahrscheinlichkeit

N	n	S	x_i	Einzelw.	kum.
5	1	1	0	0.8000	0.8000
			1	0.2000	1.0000
	2	1	0	0.6000	0.6000
			1	0.4000	1.0000
		2	0	0.3000	0.3000
			1	0.6000	0.9000
		2	2	0.1000	1.0000
	3	1	0	0.4000	0.4000
			1	0.6000	1.0000

¹²⁵ nach BOHLEY, ⁶1996, S. 384.

In diesem einfachen Fall könnten aber auch - aufgrund der Kombinatorik¹²⁶ - diese Wahrscheinlichkeiten relativ einfach selbst berechnet werden:

- Einzelwahrscheinlichkeit des Auftretens von keiner defekten Maschine in der Stichprobe: $3/5 \cdot 2/4 = 0.30$ bzw. 30%
- Einzelwahrscheinlichkeit des Auftretens von einer defekten Maschine in der Stichprobe: $= 3/5 \cdot 2/4 + 2/5 \cdot 3/4 = 0.60$ bzw. 60%
- Einzelwahrscheinlichkeit des Auftretens von zwei defekten Maschinen in der Stichprobe: $= 2/5 \cdot 1/4 = 0.10$ bzw. 10%

7.1.6 Poissonverteilung

Die Berechnung der Binomialverteilung mit (theoretischen) Wahrscheinlichkeiten des 'Erfolges' bei jedem Versuch (π) von weniger als 0.05 können - insbesondere bei grosser Anzahl von Versuchen (n) - nur sehr mühsam berechnet werden. Für diesen Grenzfall wurde speziell die Poissonverteilung¹²⁷ 'kreiert', die viel einfacher zu berechnen ist und eine gute Annäherung darstellt. Als Faustregel gilt: Die Poissonverteilung kann anstelle der Binomialverteilung immer dann verwendet werden, wenn $n > 10$ und $\pi < 0.05$.¹²⁸

Aus den obigen Ausführungen ist ersichtlich, dass die Poissonverteilung auch als Häufigkeitsverteilung für 'seltene Ereignisse' (bzw. Erfolge) herangezogen und auch als 'Gesetz der unwahrscheinlichen Ereignisse'¹²⁹ bezeichnet wird.¹³⁰

Die Poissonverteilung ist wiederum eine diskrete Zufallsverteilung, weil hier auch Zählungen vorgenommen werden, und ist das Modell für eines vom Zufall abhängigen Ereignisses, das innerhalb eines gegebenen Zeitintervalls nur wenige Male oder auch keinmal auftritt.¹³¹

Die Poissonverteilung hat viele moderne Anwendungen und wird als Modell zur Beschreibung der Verteilung von z.B. Dateneingabefehler pro Stunde, Schiffsankünfte pro Tag in einem Hafen, Geislerfahrer pro Tag, usw. benutzt.

Die **Einzelwahrscheinlichkeit des Auftretens von x_i 'Ereignissen' der Poissonverteilung** berechnet sich wie folgt:

$$P(x_i) = \frac{\mu^{x_i} \cdot e^{-\mu}}{x_i!}$$

μ ist das arithmetische Mittel der auftretenden 'Ereignisse' (innerhalb eines gegebenen Zeitintervalls) [mü], wobei $\mu = n \cdot \pi$

$P(x_i)$ ist die Einzelwahrscheinlichkeit des Auftretens von x_i 'Ereignissen'

x_i steht für die Anzahl des Auftretens von 'Ereignissen'

e ist die Konstante 2.71828 (Basis des Logarithmus naturalis 'ln' bzw. 'log_e')

! steht für 'Fakultät' und bedeutet die Multiplikation der vorgegebenen Zahl mit der nächst kleineren ganzen Zahl bis hinunter auf 1 (definitionsgemäss ist $0! = 1$)

Auch für die Poissonverteilung wurden wegen des grossen Rechenaufwandes (vor allem bei den kumulierten Wahrscheinlichkeiten) Tabellen erstellt (siehe Tabellen-Sammlung, Seite 212ff).

¹²⁶ Kombinatorik: Zweig der Mathematik, in dem untersucht wird, auf welche und auf wie viele Arten endliche Mengen angeordnet und zu Teilmengen zusammengestellt werden können.

¹²⁷ poisson probability distribution

¹²⁸ siehe BOHLEY, ⁶1996, S. 387.

¹²⁹ 'law of improbable events'

¹³⁰ siehe BOHLEY, ⁶1996, S. 385. und MASON, LIND, MARCHAL, 1967, ¹⁰2000, S. 207.

¹³¹ nach BOHLEY, ⁶1996, S. 385.

Anhand eines Beispiels¹³² soll die Poissonverteilung illustriert werden:

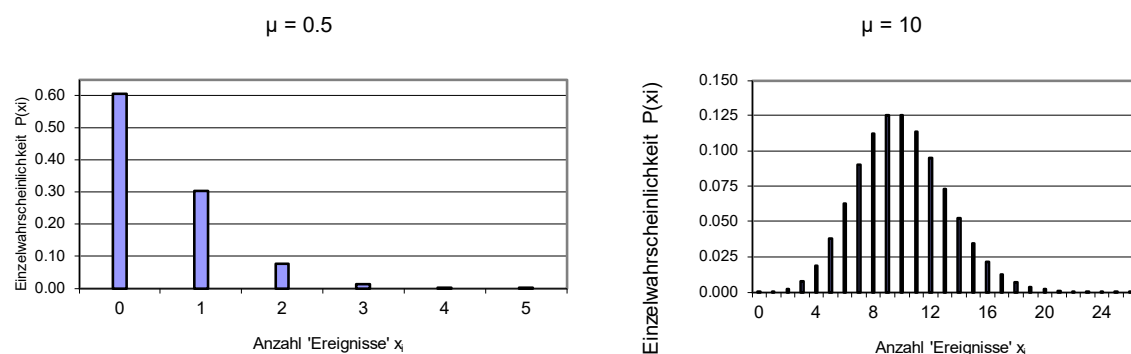
Ein Massen-Produktions-Unternehmen hat nach der Einführung des Total Quality Managements (TQM) nur noch eine sehr geringe Ausschussquote. Die Qualitätskontrolle stellt durchschnittlich pro Tag nur noch drei defekte Produkte fest (μ).

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass am nächsten Tag genau zwei (bzw. drei und mehr) defekte Produkte von der Qualitätskontrolle festgestellt werden?

Aus der Tabelle der Poissonverteilung in der Tabellen-Sammlung (Seite 212ff) ist ersichtlich (siehe hervorgehobene Einzelwahrscheinlichkeiten und kumulierte Wahrscheinlichkeiten im 'Auszug' unten), dass diese Wahrscheinlichkeiten 22.4% (bzw. $100\% - 42.32\% = 57.68\%$) betragen.

Nachstehend sind zwei grafische Darstellungen von Poissonverteilungen aufgeführt:

Abb. 56: Ausgewählte Poissonverteilungen



¹³² siehe auch TOUTENBURG, FLIEGER, KASTNER, 1995, S. 96. und SIEGEL, 42000, S. 238.

7.2 Stetige Zufallsverteilungen¹³³

Im letzten Kapitel ging es darum, die wichtigsten diskreten Zufallsverteilungen vorzustellen. Dabei ging es um die Wahrscheinlichkeit der Anzahl eintretender 'Erfolge' bzw. 'Ereignisse', wobei die Anzahl der eintretenden 'Erfolge' lediglich ganze Zahlen sein konnten.

In diesem Kapitel geht es um die 'Familie' der stetigen Zufallsverteilungen. Hier wird die Einschränkung 'ganze Zahlen' weggelassen, d.h. **die auftretenden Fälle bzw. Zufallsvariable können bzw. kann jeden Wert innerhalb gewisser Limiten annehmen**. Z.B. Luftdruck in Pneu, Distanz zwischen Ortschaften, Grösse von Menschen oder Bäumen, usw.

In der Folge werden die wichtigsten stetigen Zufallsverteilungen näher erläutert, nämlich die (Standard-)Normalverteilung¹³⁴, die T-Verteilung¹³⁵, die Chi-Quadratverteilung¹³⁶ sowie die F-Verteilung¹³⁷.

7.2.1 (Standard-)Normalverteilung

Eine der bekanntesten Zufallsverteilungen ist sicherlich die sogenannte Normalverteilung¹³⁸. Der Begriff der 'Normalverteilung' wurde vom Göttinger Mathematiker und Astronomen *Carl Friedrich Gauss* (1777-1855) geprägt, weshalb diese Verteilung im deutschsprachigen Raum auch häufig '**Gauss'sche Verteilung**' genannt wird.

Sie kann immer dann festgestellt werden, wenn **die Werte eines Daten-Sets "das Ergebnis einer sehr grossen Zahl jeweils kleiner, zufallsabhängiger Einzeleinflüsse ist, die sich additiv zusammensetzen"**. Dieses 'empirische Gesetz' (siehe Kapitel 5.2.9) gilt "eher für die Höhe von Bäumen, die Dauer von Schwangerschaften, die Reissfestigkeit von Seilen, aber weniger für die Höhe von Umsätzen, Einkommen, Vermögen usw." ¹³⁹

Wie sich empirisch herausgestellt hat, weist diese 'Normalverteilung' folgende Eigenschaften auf:

- Sie ist **glockenförmig**¹⁴⁰ und hat nur einen '**Gipfel**' in der Mitte der Verteilung. Das **arithmetische Mittel, der Median und der Modus der Normalverteilung sind gleich gross und befinden sich in der Mitte** bzw. beim 'Gipfel'.
- Die Normalverteilung ist **symmetrisch um das arithmetische Mittel verteilt**, d.h. die Verteilung ist spiegelbildlich um das arithmetische Mittel angeordnet.
- Die **Normalverteilung fällt vom Zentralwert in beide Richtungen leicht und asymptotisch ab**, d.h. die Wahrscheinlichkeiten werden immer kleiner, berühren aber die X-Achse nie, bzw. sind nie gleich Null. Die Normalverteilung hat somit eine Spannweite von minus unendlich bis plus unendlich.
- Die Normalverteilung hat zudem die Eigenschaft, dass sich die (Eintritts-)Wahrscheinlichkeiten **zu rund 68% im Bereich von $\mu \pm 1\sigma$, zu ca. 95% im Bereich von $\mu \pm 2\sigma$, und zu 99.7% im Bereich von $\mu \pm 3\sigma$ befinden**.

¹³³ continuous probability distributions

¹³⁴ (standard) normal probability distribution

¹³⁵ student's t distribution

¹³⁶ Chi-square distribution

¹³⁷ F distribution

¹³⁸ normal probability distribution

¹³⁹ BOHLEY, ⁶1996, S. 395.

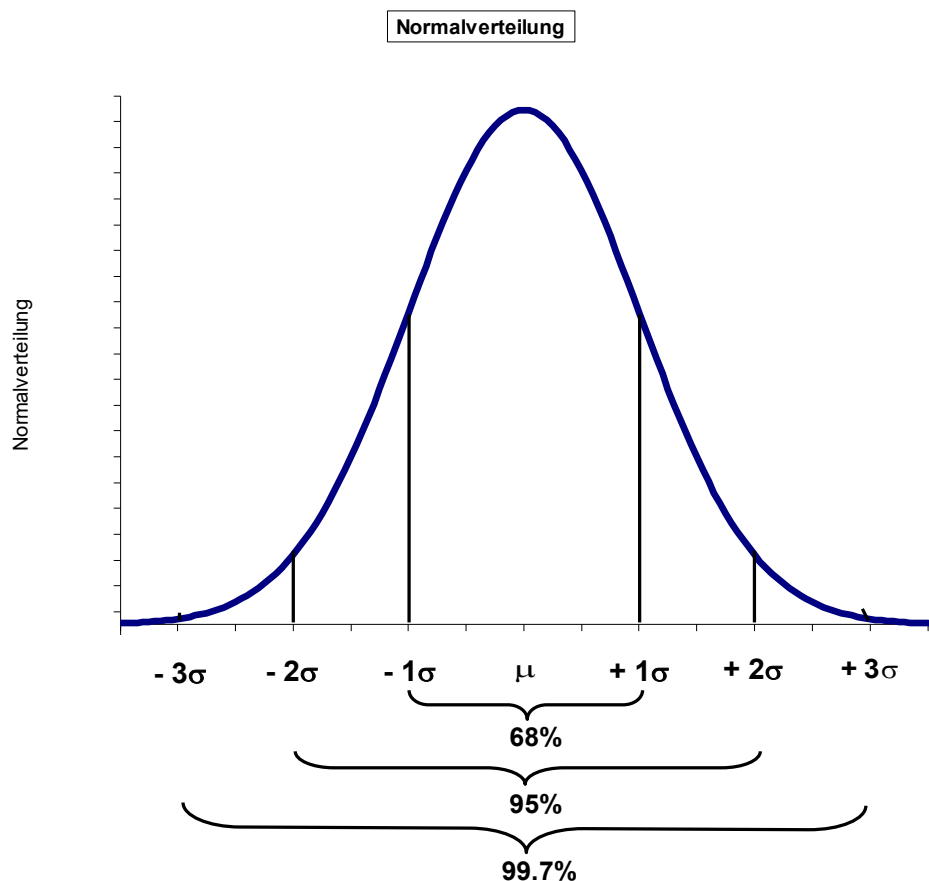
¹⁴⁰ bell-shaped

Die Normalverteilung hat eine weitere Eigenschaft, nämlich dass die Binomialverteilung bei grossem 'n' in die Normalverteilung übergeht, d.h. **die Binomialverteilung konvergiert bei grossem 'n' zur Normalverteilung**. Die Normalverteilung kann also bei grossem 'n' annähernd für die Binomialverteilung verwendet werden (siehe dazu auch die letzten grafischen Darstellungen in Kapitel 7.1.4). Diese Approximationsmöglichkeit wird auch als 'zentraler Grenzwertsatz'¹⁴¹ bezeichnet (siehe dazu die Ausführungen unter Kapitel 8.3).

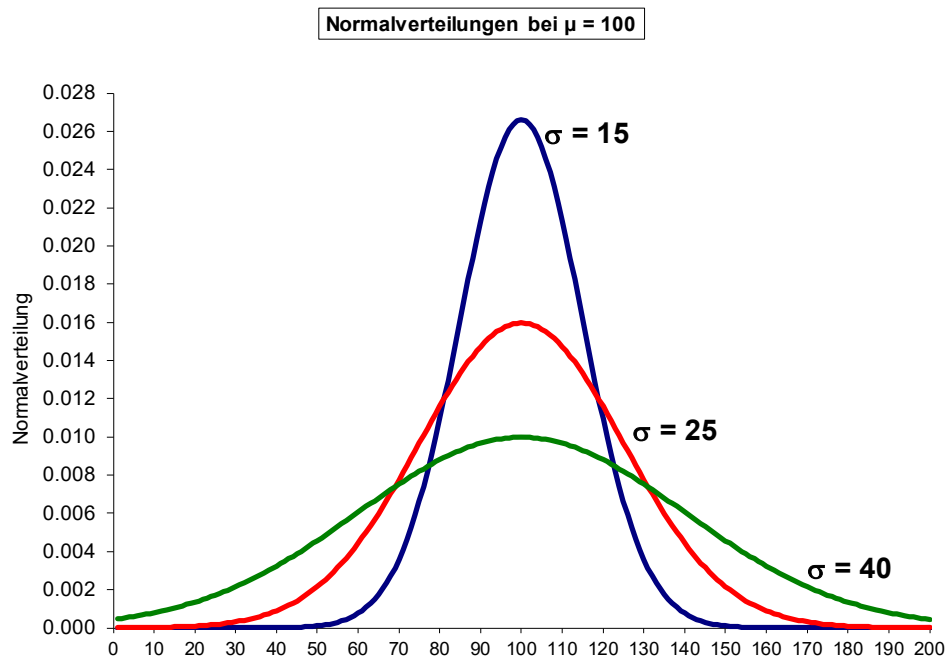
Die **(Dichte-)Funktion der Normalverteilung** ist relativ kompliziert, und sie soll deshalb hier nicht aufgeführt werden. Wesentlich ist lediglich, dass sie **durch die zwei Parameter, nämlich durch das arithmetische Mittel bzw. den Erwartungswert ' μ ' und die Standardabweichung ' σ ' definiert** ist.

Die verbalen Beschreibungen von oben werden mit den folgenden Darstellungen verdeutlicht werden.

Abb. 57: (Standard-)Normalverteilung



¹⁴¹ 'central limit theorem'

Abb. 58: Ausgewählte Normalverteilungen

Aufgrund der ersten Darstellung, welche die letzte Eigenschaft betreffend die Verteilung der (Eintritts-)Wahrscheinlichkeiten der Normalverteilung visuell darstellt, folgt notgedrungen die zweite Darstellung. Sie zeigt klar auf, dass sich die 'Form' der Normalverteilung entsprechend der Standardabweichung verändert: ist letztere klein, so ist die 'Glockenform' der Normalverteilung hoch und eng, ist sie aber gross, so ist die 'Glocke' niedrig und breit ausgerichtet.

Damit man nun nicht für jede Normalverteilung relativ komplizierte Berechnungen durchführen muss, ist man aufgrund der oben erwähnten Eigenschaften der Normalverteilung sehr rasch auf die 'Idee' gekommen, die Normalverteilung anhand einer 'Transformation' zu 'standardisieren'.

Die **'Transformation' einer Normalverteilung zur Standardnormalverteilung 'z'** geschieht anhand folgender Formel:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

σ steht für die Standardabweichung [sigma] der Normalverteilung

μ ist das arithmetische Mittel bzw. der Erwartungswert [mü] der Normalverteilung

x steht für irgendeinen Wert bzw. Merkmalsausprägung des Daten-Sets

Die Standardnormalverteilung¹⁴² 'z' hat die wichtige Eigenschaft, dass ihr **arithmetisches Mittel bzw. der Erwartungswert ' μ ' immer gleich Null und ihre Standardabweichung ' σ ' immer gleich Eins ist.**

Die relativ komplizierten Berechnungen für jede Normalverteilung können nun durch eine einzige, 'standardisierte Normalverteilung' ersetzt werden. Dazu bedient man sich einer etwas 'speziellen' Tabelle (siehe Tabellen-Sammlung, Seite 212ff).

¹⁴² standard normal probability distribution

'Gebrauchsanleitung' für die Standardnormalverteilungstabelle:

Der z-Wert setzt sich aus der ersten Spalte plus den Spalten-Wert in der obersten Zeile zusammen.

Ein Beispiel soll dies verdeutlichen:

Ein z-Wert von 1.96 setzt sich aus dem Wert 1.9 der ersten Spalte plus dem Wert 0.06 in der obersten Zeile der achten Spalte zusammen. Wird nun sowohl horizontal beim Wert 1.9 und vertikal bei der achten Spalte der 'Schnittwert' angeschaut, besagt dieser Wert von 0.4750, dass im Bereich zwischen dem z-Wert von Null (gleich arithmetische Mittel bzw. Erwartungswert ' μ ' der Normalverteilung) und demjenigen von 1.96 (gleich 1.96 der Standardabweichung ' σ ' der Normalverteilung), 47.5% der (Eintritts-)Wahrscheinlichkeiten anzutreffen sind.

Aufgrund der Symmetrie-Eigenschaft der Normalverteilung ist auch leicht berechenbar, dass zwischen minus unendlich und +1.96 Standardabweichungen 97.5% der (Eintritts-)Wahrscheinlichkeiten vorkommen müssen. Da bei der Standardnormalverteilung links von Null (gleich arithmetisches Mittel bzw. Erwartungswert) 50% der (Eintritts-)Wahrscheinlichkeiten vorkommen, ist die 'neue' Wahrscheinlichkeit um 50% höher.

An einem praktischen Beispiel soll die Vorgehensweise weiter vertieft werden:

Ein Bond-Manager verwaltet ein Portefeuille von CHF 300 Mio. Der interne (jährliche) Ertragssatz¹⁴³ (unter Berücksichtigung der Coupon-Zinsen und der Marktpreisveränderungen der Bonds des Portefeuilles) sei normalverteilt und weise einen Erwartungswert von 6% und eine Standardabweichung von 10% auf. Berechnen Sie den Value-at-Risk (VaR) bzw. der maximale Verlust, der mit 95% Wahrscheinlichkeit nicht überschritten wird.

Bei der Berechnung des VaR geht es lediglich um die Bestimmung einer 'Verlustgrenze', d.h. die rechts vom arithmetischen Mittel bzw. Erwartungswert liegende Wahrscheinlichkeit der Standardnormalverteilung interessiert grundsätzlich nicht und kann somit voll zu 50% übernommen werden. Links vom arithmetischen Mittel bzw. Erwartungswert muss nun derjenige z-Wert gefunden werden, der die verbleibenden 45% (95% - 50%) 'abdeckt'.

Aus der Tabelle der Standardnormalverteilung in der Tabellen-Sammlung (Seite 212ff) ist ersichtlich (siehe hervorgehobene Tabellenwerte im 'Auszug' unten), dass dieser 'kritische' z-Wert -1.645 beträgt. Dieser z-Wert ist negativ, da er sich links vom arithmetischen Mittel bzw. Erwartungswert der Standardnormalverteilung befindet.

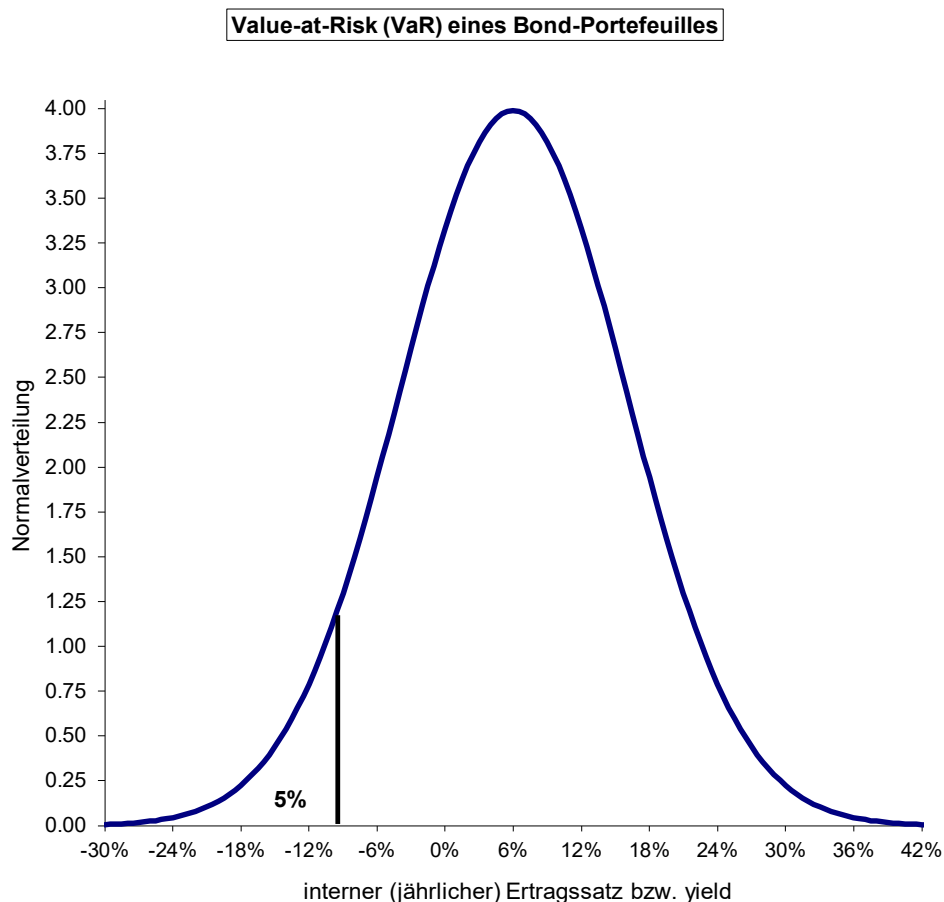
¹⁴³ yield

Wird der oben gefundene z-Wert, der Erwartungswert und die Standardabweichung in die 'Transformationsformel' eingesetzt und diese nach 'x' aufgelöst, ergibt dies folgendes Ergebnis:

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma} \Rightarrow x = z \cdot \sigma + \mu \Rightarrow x = -1.645 \cdot 10\% + 6\% = -10.45\%$$

Die diesbezügliche Dichtefunktion sieht wie folgt aus:

Abb. 59: Normalverteilung Value-at-Risk (VaR) eines Bond-Portefeuilles



Für die CHF 300 Mio. des Bond-Managers bedeutet dies ein absoluter VaR von CHF -31.35 Mio. (CHF 300 Mio. • -10.45%).

Der Bond-Manager kann also - unter den eingangs aufgeführten Bedingungen - sagen, dass mit 95% Wahrscheinlichkeit sein Verlust nicht über CHF 31.35 Mio. zu stehen kommen wird, oder anders ausgedrückt, dass lediglich mit einer Wahrscheinlichkeit von 5% der Verlust von CHF 31.35 Mio. überschritten wird.

7.2.2 T-Verteilung

Wie einleitend bei der Normalverteilung ausgeführt wurde (siehe Kapitel 7.2.1) kann diese immer dann festgestellt werden, wenn die Werte eines Daten-Sets **das Ergebnis einer sehr grossen Zahl** jeweils kleiner, zufallsabhängiger Einzeleinflüsse ist.

Genau dieses Problem der 'sehr grossen Zahl' beschäftigte den bei der Arthur Guinness & Sons Brauerei in Dublin angestellte englische Statistiker *William S. Gosset* (1876-1937). Er entdeckte eine **neue Zufallsvariable, welche die Problematik von kleinen Stichproben löste** und stellte sie der Öffentlichkeit im Jahr 1908 unter dem Pseudonym 'Student' vor. Die Brauerei fürchtete nämlich um ihren guten Ruf, wenn ihre Angestellten als Wissenschaftler bekannt würden und legte ihnen deshalb nahe, bei wissenschaftlichen Publikationen ein Pseudonym zu verwenden. In der Folge gab man der '**Student-Verteilung**'¹⁴⁴ nach dem verwendeten Symbol auch den Namen '**T-Verteilung**'¹⁴⁵

Die 'T-Verteilung' weist folgende Eigenschaften auf:

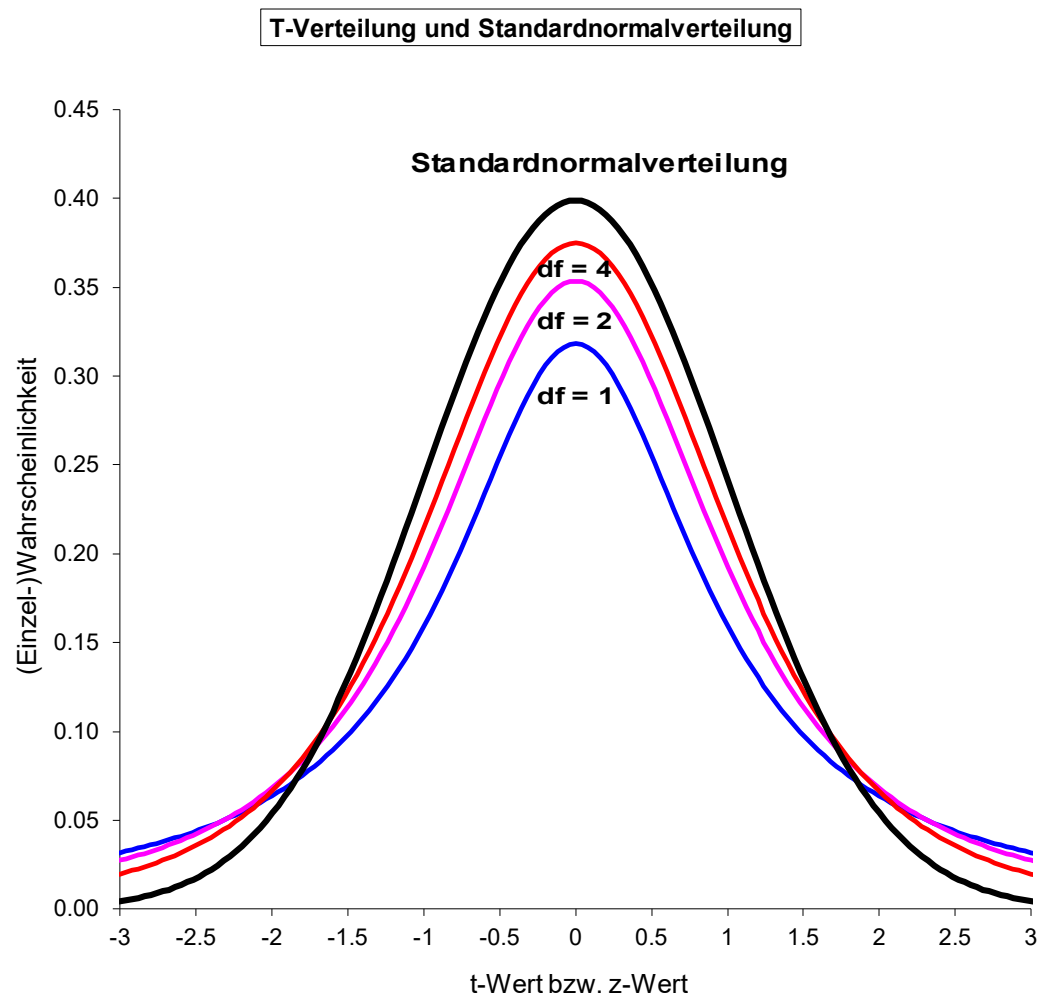
- Sie weist **grundsätzlich alle Eigenschaften der Standardnormalverteilung** auf.
- Im Gegensatz zur Standardnormalverteilung ist die **T-Verteilung aber flacher und fällt vom Zentralwert in beide Richtungen weniger steil asymptotisch ab**.
- Im Gegensatz zur Standardnormalverteilung gibt es bei der **T-Verteilung nicht nur eine Zufallsverteilung**, sondern eine ganze 'Familie' davon. **Jede T-Verteilung hat zwar ein arithmetisches Mittel bzw. einen Erwartungswert von Null, doch unterscheidet sich die Standardabweichung je nach Stichprobenumfang**.
- **Bei zunehmendem Stichprobenumfang konvergiert sie aber in die Standardnormalverteilung**. Dies ist auch der Grund, weshalb Statistik-Software-Pakete ausschliesslich mit der T-Verteilung 'rechnen' und nicht mit der Standardnormalverteilung.

Die verbalen Beschreibungen von oben werden mit folgender Darstellung verdeutlicht. Anstelle des Stichprobenumfangs wird dabei die Anzahl Freiheitsgrade¹⁴⁶ angegeben, die bei der T-Verteilung meistens dem Wert ' $n - 1$ ' entspricht. Der Ausdruck 'Freiheitsgrad' (df) bezeichnet die Anzahl von 'frei variierbaren' Werten in einem Daten-Set bzw. einer Stichprobe.

¹⁴⁴ student's t distribution

¹⁴⁵ siehe BOHLEY, ⁶1996, S. 415.

¹⁴⁶ degrees of freedom

Abb. 60: Gegenüberstellung ausgewählte T-Verteilungen mit der Standardnormalverteilung

Auf die relativ komplizierte Berechnungsformel soll auch hier nicht näher eingegangen werden. Mathematisch entsteht die T-Verteilung aus der Division der Standardnormalvariablen 'z' durch eine von 'z' unabhängigen, transformierten Chi-Quadratverteilung. Dazu verwendet man wiederum entsprechende Tabellen. Da es - wie oben bereits ausgeführt - nicht nur eine T-Verteilung gibt, sondern eine ganze 'Familie' davon, müsste man eine Vielzahl von Tabellen der T-Verteilung erstellen. Da die T-Verteilung aber meistens für Hypothesentests (siehe Kapitel 9) verwendet wird, ist es üblich, nur eine Tabelle mit den diesbezüglich kritischen Werten aufzuführen (siehe Tabellen-Sammlung, Seite 212ff).

7.2.3 Chiquadratverteilung

Eine weitere Zufallsverteilung sei hier angeführt, die in der induktiven Statistik, speziell im Zusammenhang mit Streuungen (Varianzen), eine grosse Rolle spielt. Sie wird hier aufgeführt, da die Chiquadratverteilung¹⁴⁷ eine 'Vorstufe' zur im nächsten Kapitel aufgeführten *F*-Verteilung darstellt.

Wie noch in Kapitel 9 beschrieben wird, stellt sich in der induktiven Statistik meistens die Frage, ob gewisse (statistische) **Aussagen bezüglich Parameter** (z.B. ' μ ', ' π ' oder ' σ^2 ') der Grundgesamtheit aufgrund einer Stichprobe gemacht werden können oder nicht. Aus diesem Grund werden diese 'Überprüfungen' **auch Parametertests genannt**. Dies setzt aber voraus, dass ein 'Daten-Niveau mit Intervall' oder 'mit Verhältniswert' vorliegt.

Wie steht es nun, wenn **lediglich ein 'nominales' oder 'ordinales Daten-Niveau' vorhanden ist und keine Annahmen über die Form bzw. Verteilung der Grundgesamtheit** getroffen werden können?

Für diese Art von (statistischen) Aussagen, die auch **nichtparametrische Tests**¹⁴⁸ genannt werden, kann die Chiquadratverteilung verwendet werden.

Die 'Chiquadratverteilung' weist folgende Eigenschaften auf:

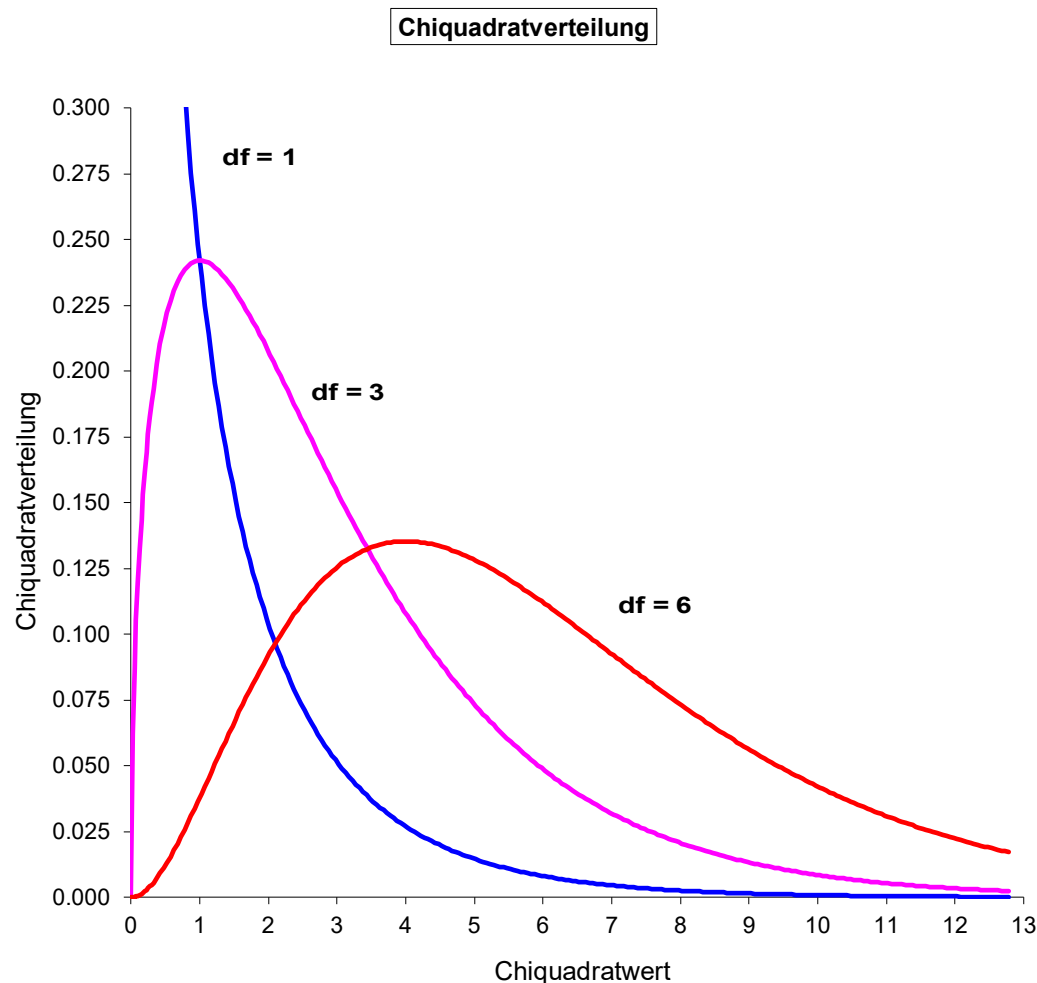
- Sie ist **nie negativ**, da sie - wie der Name bereits sagt - auf quadrierten Standardnormalverteilungen basiert.
- Wie auch bei der T-Verteilung gibt es bei der **Chiquadratverteilung nicht nur eine Zufallsverteilung**, sondern eine ganze 'Familie' davon. **Jede Chiquadratverteilung sieht - je nach Anzahl Kategorien - anders aus** bzw. differiert also sowohl im arithmetischen Mittel bzw. Erwartungswert als auch in der Standardabweichung.
- Die Chiquadratverteilung hat **eine positive Schiefe bzw. ist rechtsschief oder linkssteil**.
- **Bei zunehmender Anzahl Kategorien konvergiert sie aber in die Standardnormalverteilung**.

Die verbalen Beschreibungen von oben werden mit folgender Darstellung verdeutlicht. Anstelle der Anzahl Kategorien 'k' wird dabei die Anzahl Freiheitsgrade¹⁴⁹ angegeben, die bei der Chiquadratverteilung meistens dem Wert 'k - 1' entspricht. Der Ausdruck 'Freiheitsgrad' (df) bezeichnet die Anzahl von 'frei variierbaren' Werten in einem Daten-Set bzw. einer Stichprobe.

¹⁴⁷ Chi-square distribution

¹⁴⁸ nonparametric tests

¹⁴⁹ degrees of freedom

Abb. 61: Ausgewählte Chiquadratverteilungen

Auf die relativ komplizierte Berechnungsformel soll auch hier nicht näher eingegangen werden. Mathematisch entsteht die Chiquadratverteilung aus der Summe der Quadrate von 'df' untereinander unabhängigen Standardnormalverteilungen 'z'. Dazu verwendet man wiederum entsprechende Tabellen. Da es - wie oben bereits ausgeführt - nicht nur eine Chiquadratverteilung gibt, sondern eine ganze 'Familie' davon, müsste man eine Vielzahl von Tabellen der Chiquadratverteilung erstellen. Da die Chiquadratverteilung aber meistens für nichtparametrische Tests verwendet wird, ist es üblich, nur eine Tabelle mit den diesbezüglich kritischen Werten aufzuführen (siehe Tabellen-Sammlung, Seite 212ff).

Ein Beispiel¹⁵⁰ soll die Anwendung der Chiquadratverteilung verdeutlichen.

Ein Unternehmen hat eine neue Software entwickelt, die - gemäss den Aussagen der Entwickler - sowohl die Bedürfnisse der Normalbenutzer als auch diejenigen der Power-User berücksichtigt. Die Marketingabteilung ist aber von der Aussage der Entwickler nicht restlos überzeugt und will sich diesbezüglich durch eine kleine Marktuntersuchung bei 200 potentiellen Kunden Gewissheit verschaffen. Nachdem die potentiellen Kunden das Produkt eine Woche lang testen konnten, werden sie befragt, wie gut die Feature-Abdeckung des neuen Produkts ist. Zudem werden die Befragten in zwei Kategorien unterteilt, nämlich in 'Normalbenutzer' und 'Power-User'.

¹⁵⁰ siehe auch MASON, LIND, MARCHAL, 1967, ¹⁰2000, S. 528f. und SIEGEL, ⁴2000, S. 678ff.

In der folgenden Zusammenstellung sind die Resultate aus der Befragung zusammengefasst. Sie gibt also die beobachteten bzw. festgestellten Werte wieder.

Abb. 62: Tabelle festgestellte Befragungsergebnisse

Benutzer-Typ	Feature-Abdeckung				Total
	sehr gut	gut	mittelmässig	ungenügend	
Normalbenutzer	28	33	34	25	120
Power-User	12	27	16	25	80
Total	40	60	50	50	200

Die Marketingabteilung müsste sich nun fragen, ob sich die festgestellten Resultate in den Kategorien (statistisch) signifikant unterscheiden, oder ob sie (statistisch) rein zufällig angefallen sind. Letzteres wird auch als Null-Hypothese bezeichnet (siehe dazu die Ausführungen in Kapitel 9). Die Frage lautet also, ob sich die Verteilung in den Kategorien (statistisch) signifikant von den Total-Verteilungen unterscheidet.

Um dies abzuklären, verwendet man die Chi-Quadrat-Verteilung, wobei sich die Anzahl 'Freiheitsgrade' aus der Multiplikation der um Eins reduzierten Anzahl der Unterscheidungsmerkmale in den Kategorien berechnet. Im hier vorliegenden Fall gibt es zwei Kategorien, nämlich der 'Benutzer-Typ' und die 'Feature-Abdeckung'. Die Anzahl 'Freiheitsgrade' ist somit $(2-1) \cdot (4-1) = 3$.

In der Tabelle der Chi-Quadrat-Verteilung in der Tabellen-Sammlung (Seite 212ff) kann bei einem Vertrauensniveau von 95% - was umgekehrt formuliert bedeutet, dass die (statistische) Fehlerwahrscheinlichkeit des Tests 5% beträgt - der 'kritische' Wert von 7.815 herausgelesen werden (siehe hervorgehobener Tabellenwert im 'Auszug' unten).

Chi-Quadrat-Verteilung

(kritische) Chi-Quadrat-Werte bzw. χ^2

df	0.200	0.100	0.050	0.025	0.020
1	1.642	2.706	3.841	5.024	5.412
2	3.219	4.605	5.991	7.378	7.824
3	4.642	6.251	7.815	9.348	9.837
4	5.989	7.779	9.488	11.143	11.668
5	7.289	9.236	11.070	12.833	13.388

Um den Vergleich mit dem oben errechneten 'kritischen' Wert der Chi-Quadrat-Verteilung vornehmen zu können, muss dieser mit einer zu berechnenden Prüfgrösse (auch Test-Statistik genannt) verglichen werden. Dabei wird zuerst die - aufgrund der Kategorien-Totale errechnete - erwartete Verteilung ermittelt.

Die folgende Zusammenstellung gibt die erwarteten Verteilungen aufgrund der Kategorien-Totale wieder.

Abb. 63: Tabelle erwartete Befragungsergebnisse

Benutzer-Typ	Feature-Abdeckung				Total
	sehr gut	gut	mittelmässig	ungenügend	
Normalbenutzer	24	36	30	30	120
Power-User	16	24	20	20	80
Total	40	60	50	50	200

Berechnungserklärungen (ein paar Beispiele):

'Normalbenutzer' mit 'gute Feature-Abdeckung'		Kategorien-Total 'Normalbenutzer' / Total Stichprobe	Total Stichprobe	Kategorien -Total 'gute Feature-Abdeckung'
36	=	120	200	60
'Power-User' mit 'mittelmässiger Feature-Abdeckung'		Kategorien-Total 'Power-User'	Total Stichprobe	Kategorien -Total 'mittelmässige Feature-Abdeckung'
20	=	80	200	50

Der letzte Schritt besteht nun darin, dass man pro 'Zelle' den beobachteten bzw. festgestellten Wert vom erwarteten Wert abzieht, das erhaltene Resultat quadriert und anschliessend durch den erwarteten Wert dividiert. Die Summe daraus (hier 5.708) ist die berechnete Prüfgrösse bzw. Test-Statistik, die mit dem 'kritischen' Wert der Chiquadratverteilung verglichen werden kann.

Die folgende Zusammenstellung gibt die $[\text{beobachteten minus erwarteten Werten}]^2 / \text{erwarteten Werte}$ pro Zelle wieder.

Abb. 64: Tabelle Ermittlung Prüfgrösse Befragungsergebnisse

Benutzer-Typ	Feature-Abdeckung				Summe aller Zellen
	sehr gut	gut	mittelmässig	ungenügend	
Normalbenutzer	0.667	0.250	0.533	0.833	5.708
Power-User	1.000	0.375	0.800	1.250	

Da die **berechnete Prüfgrösse** (Summe aller hervorgehobenen Zellen-Werte in obiger Darstellung) von 5.708 **kleiner ist als der 'kritische' Wert** der Chiquadratverteilung von 7.815 **kann nicht gesagt werden, dass sich die festgestellten Resultate in den Kategorien (statistisch) signifikant** (bei einem Vertrauensniveau von 95%) **unterscheiden**, d.h. die festgestellten Resultate in den Kategorien könnten also rein zufällig entstanden sein.

Für die Marketingabteilung bedeutet dies, dass kein (statistisch) signifikanter Zusammenhang zwischen dem 'Benutzer-Typ' und der 'Feature-Abdeckung' besteht, wodurch die Aussage der Entwickler nicht 'falsifiziert' werden kann.

7.2.4 F-Verteilung

Die letzte hier aufgeführte Zufallsverteilung ist die *F*-Verteilung¹⁵¹. Sie wurde vom englischen Statistiker *Sir Ronald A. Fisher* (1890 - 1962) in den 1920er Jahren 'entdeckt' und später nach ihm benannt. Die *F*-Verteilung spielt wiederum im Rahmen der induktiven Statistik eine grosse Rolle. Sie wird einerseits zur Überprüfung der Gleichheit zweier Varianzen benutzt und andererseits zum Vergleich mehrerer arithmetischen Mittel bzw. Erwartungswerte der Grundgesamtheit, letztere auch Varianzanalyse oder ANOVA¹⁵² genannt (siehe dazu die Ausführungen in Kapite 9.7 und 10.7I). In beiden Fällen muss die Grundgesamtheit normalverteilt sein, und ein 'Daten-Niveau mit Intervall' oder 'mit Verhältniswert' vorliegt

Die '*F*-Verteilung' weist 'folgende Eigenschaften' auf:

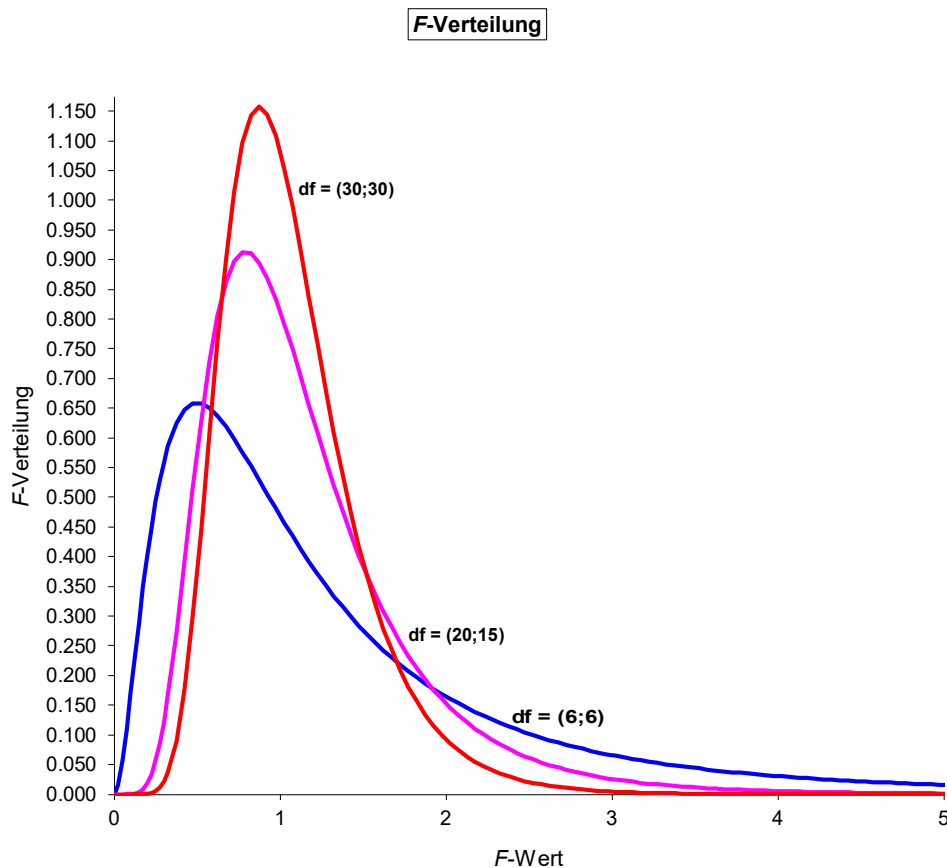
- Sie ist **nie negativ** und ist eine stetige Zufallsverteilung
- Wie auch bei der T-Verteilung gibt es bei der ***F*-Verteilung nicht nur eine Zufallsverteilung**, sondern eine ganze 'Familie' davon. **Jede *F*-Verteilung sieht - je nach Anzahl der Freiheitsgrade in Zähler und Nenner - anders aus** bzw. differiert also sowohl im arithmetischen Mittel bzw. Erwartungswert als auch in der Standardabweichung.
- Die *F*-Verteilung hat wie die Chiquadratverteilung **eine positive Schiefe bzw. ist rechtsschief oder linkssteil**.
- **Bei zunehmender Anzahl der Freiheitsgrade konvergiert sie aber in die Normalverteilung mit einem Wertebereich von Null bis plus unendlich.**

Die verbalen Beschreibungen von oben werden mit folgender Darstellung verdeutlicht. Dabei entspricht die Anzahl der Freiheitsgrade¹⁵³ im Zähler und Nenner meistens dem Wert ' $n_{\text{Zähler}} - 1$ ' bzw. ' $n_{\text{Nenner}} - 1$ '. Der Ausdruck 'Freiheitsgrad' (df) bezeichnet die Anzahl von 'frei variierbaren' Werten in einem Daten-Set bzw. einer Stichprobe.

¹⁵¹ F distribution

¹⁵² **analysis of variance**

¹⁵³ degrees of freedom

Abb. 65: Ausgewählte F -Verteilungen

Auf die relativ komplizierte Berechnungsformel soll auch hier nicht näher eingegangen werden. Mathematisch entsteht die F -Verteilung aus der Division von zwei voneinander unabhängigen, transformierten Chi-Quadratverteilungen. Dazu verwendet man wiederum entsprechende Tabellen. Da es - wie oben bereits ausgeführt - nicht nur eine F -Verteilung gibt, sondern eine ganze 'Familie' davon, müsste man eine Vielzahl von Tabellen der F -Verteilung erstellen. Da die F -Verteilung aber meistens für Hypothesentests (siehe Kapitel 9) verwendet wird, ist es üblich, nur ein paar Tabellen mit den diesbezüglich kritischen Werten aufzuführen (siehe Tabellen-Sammlung, Seite 212ff).

7.3 Repetitionsfragen

7.3.1 Lebensdauer eines Batterietyps¹⁵⁴

Aufgrund einer umfassenden Untersuchung wurde festgestellt, dass die Lebensdauer eines Batterietyps normalverteilt ist und eine durchschnittliche Lebensdauer von 37 Stunden und eine diesbezügliche Standardabweichung von 4.5 Stunden aufweist.

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Batterie dieses Typs eine Lebensdauer zwischen 33 und 41 Stunden hat?

7.3.2 Anzahl 'Überlebenstage' einer Insektenart unter Laborbedingungen

Ein Biologe möchte wissen, wie lange eine bestimmte Insektenart unter Laborbedingungen überleben kann. Nach einer langen Reihe von Experimenten wurde festgestellt, dass die Insektenart im Durchschnitt nur 95 Tage überlebt und die Standardabweichung 25 Tage beträgt. Ferner konnte die Verteilung der 'Überlebenstage' als annähernd normal festgestellt werden.

Ein Insekt mit der Experimentnummer 332 hat bereits 110 Tage überlebt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird dieses Insekt noch 20 oder mehr Tage weiterleben, d.h. also älter als 130 Tage werden?

7.3.3 Klub der Besten¹⁵⁵

An einer Hochschule gibt es einen exklusiven 'Klub der Besten'. Jeder Studierende der Hochschule muss einen speziellen Eignungstest absolvieren. Alle Studierenden, die diesen Test besonders gut bestehen (d.h. ab 155 erreichten Punkten), werden automatisch Mitglied des 'Klubs der Besten'. Wie sich aufgrund langjähriger Ergebnisse gezeigt hat sind die Ergebnisse des Eignungstests der Hochschule normalverteilt, haben ein arithmetisches Mittel von 120 Punkten und eine Standardabweichung von 20 Punkten.

Wie viel Prozent der Studierenden der Hochschule sind Mitglieder des 'Klubs der Besten' und wie gross ist der **Median** der Klubmitglieder (Angabe in erreichten Punkten beim Eignungstests)?

¹⁵⁴ siehe auch MARTIN, FIRTH, 1983, S. 41.

¹⁵⁵ siehe auch UPTON, COOK, 1996, ²1997, S. 312.

7.3.4 Alte Verarbeitungsmaschine¹⁵⁶

Eine neue Verarbeitungsmaschine zerschneidet Metallteile genau in der vorgesehenen Länge von 20 cm. Wenn die Verarbeitungsmaschine hingegen alt ist, zerschneidet sie die Metallteile nur noch in der Länge von durchschnittlich 20 cm. Dabei sind 10% der von der alten Verarbeitungsmaschine produzierten Metallteile weniger als 19 cm lang.

Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Länge der von der alten Verarbeitungsmaschine hergestellten Metallteile über 22 cm lang sind, wenn unterstellt wird, dass die Länge der von der alten Verarbeitungsmaschine hergestellten Metallteile normalverteilt ist?

7.3.5 Big Bath Accounting

In einer empirischen Untersuchung¹⁵⁷ für die Jahre 2000 und 2001 wurde bei 21 an der New York Stock Exchange kotierten Unternehmen der Telekommunikationsbranche überprüft, ob ein Zusammenhang zwischen dem Wechsel im Top-Management und dem Big Bath Accounting besteht. Vor allem im Zusammenhang mit Wertbeeinträchtigung¹⁵⁸ des Anlagevermögens wird der Begriff Big Bath Accounting gebraucht. Dabei werden die diesbezüglichen Sonderabschreibungen überhöht, um damit durch geringeren zukünftigen Abschreibungsbedarf die Ergebnisse in der Zukunft zu verbessern.

Folgender Zusammenhang wurde festgestellt

		Top-Mgmt-Wechsel	
		Ja	Nein
Big Bath Acc.	Ja	3	0
	Nein	3	15

Die Frage der Untersuchung lautete nun, ob sich die festgestellten bzw. beobachteten Resultate in den Kategorien 'Top-Management-Wechsel' und 'Big Bath Accounting' (statistisch) signifikant (Vertrauensniveau von 95% und 99%) unterscheiden, oder ob sie (statistisch) rein zufällig aufgetreten sind?

Führen Sie dafür einen Chi-Quadrat-Test durch.

¹⁵⁶ siehe auch UPTON, COOK, 1996, ²1997, S. 314f.

¹⁵⁷ siehe KNÖPFEL, Dominik. 2002. Big bath accounting. Basel: Diplomarbeit an der FHBB Fachhochschule beider Basel Nordwestschweiz, Departement Wirtschaft.

¹⁵⁸ impairment

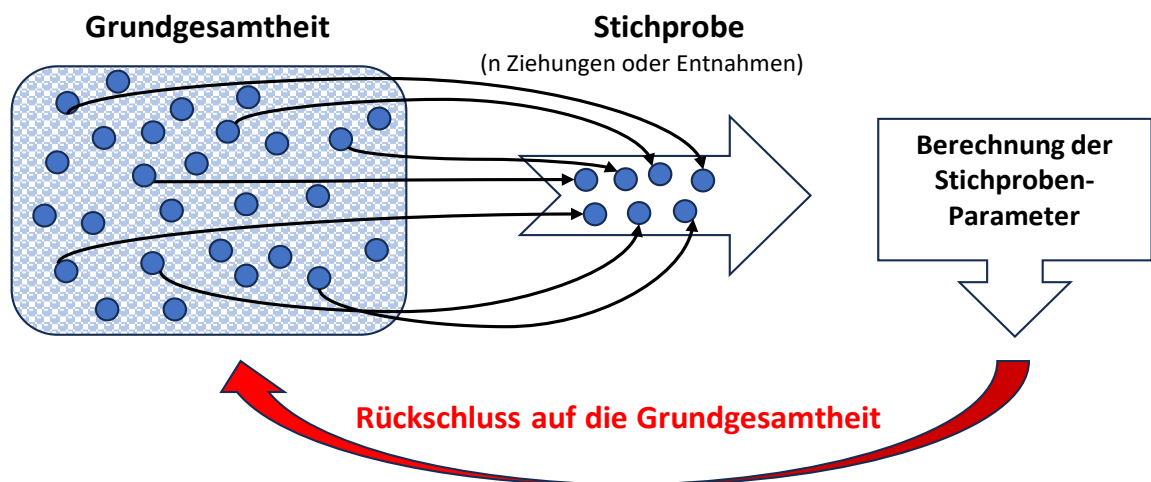
8 STICHPROBENTHEORIE UND STICHPROBENVERTEILUNGEN¹⁵⁹

Im Gegensatz zu den meisten früheren Kapiteln geht es in diesem Kapitel darum, sich mit dem zweiten Teil der Begriffsdefinition 'Statistik', d.h. der induktiven Statistik, zu befassen, bei der die Methoden erläutert werden, damit etwas über die Grundgesamtheit aufgrund einer Stichprobe herausgefunden werden kann. Dabei bedeutet Grundgesamtheit¹⁶⁰ **die Sammlung aller möglichen Individuen, Objekte oder Messungen über ein Interessensgebiet**. Die Stichprobe¹⁶¹ ist hingegen ein (An-)Teil der Grundgesamtheit.

In einem ersten Schritt wird begründet, weshalb es notwendig ist, Stichproben zu erfassen, Anschließend werden Methoden zur Stichprobenerfassung erklärt. In einem weiteren sehr wichtigen Schritt wird die Verteilung der Stichprobe herangezogen, um damit eine Aussage über die Grundgesamtheit zu machen. **Da man aber nur mit Bestimmtheit etwas über die Stichprobe aussagen kann, sind Schlussfolgerungen bezüglich der Grundgesamtheit nie mit Gewissheit möglich. Aus diesem Grund bedient man sich sogenannter Konfidenz- bzw. Vertrauensintervalle**¹⁶², damit wenigstens Aussagen betreffend die Grundgesamtheit in einem gewissen Bereich gemacht werden können.

Die folgende Darstellung verdeutlicht die Thematik:

Abb. 66: Zusammenhang Grundgesamtheit und Stichprobe



¹⁵⁹ sampling methods and sampling distributions

¹⁶⁰ population

¹⁶¹ sample

¹⁶² confidence intervals

8.1 Gründe zur Stichprobenerfassung

In sehr vielen Fällen, ist das Stichprobenerfassen die einzige Möglichkeit, eine Aussage bezüglich der Grundgesamtheit zu machen. Ein paar der wichtigsten Gründe, weshalb die Stichprobenerfassung notwendig ist, sind nachfolgend aufgeführt:¹⁶³

- **Destruktive Wirkung gewisser Tests:** Bei der Qualitätssicherung und Funktionsüberprüfung von Gütern ist es häufig so, dass mit dem 'Testen' das Produkt 'vernichtet' wird. Wenn also überhaupt noch ein Produkt verkauft werden will, dürfen nicht alle erstellten Güter getestet werden. Z.B. Crash-Tests, Reissfestigkeits-Tests, Lebensdauer von Glühbirnen, Weindegustation usw.
- **Physische Unmöglichkeit des Testens der ganzen Grundgesamtheit:** Die Grundgesamtheit z.B. der meisten Tierarten ist extrem gross und verändert sich permanent durch Migration, Geburt und Tod. Die ganze Anzahl Fische in einem Teich (Grundgesamtheit) zu zählen oder nach gewissen Kriterien zu untersuchen ist somit 'technisch' gar nicht möglich. Notgedrungen muss man sich mit Stichproben begnügen.
- **Exorbitante Kosten für die Erfassung der ganzen Grundgesamtheit:** Zur Bestimmung z.B. der 'öffentlichen Meinung' oder bei Konsumentenumfragen ist die Grundgesamtheit so gross, dass deren Erfassung extrem hohe Kosten verursachen würde. Laut Schätzungen kostet ein Produkttest bei 50 Millionen Familien ca. CHF 1.5 Mia.
- **Angemessenheit der Stichprobenresultate:** Falls die nötigen Geldmittel sogar vorhanden wären, ist es meistens unwahrscheinlich, dass die zusätzliche Genauigkeit der Erfassung einer 100%igen Stichprobe (Grundgesamtheit), einen wesentlichen Einfluss auf den Sachverhalt ausüben würde. Da normalerweise nur unwesentliche Preisunterschiede bei Grossverteilern auftreten, würde sich z.B. der Konsumentenpreisindex nur unwesentlich verändern, auch wenn die ganze Bevölkerung befragt würde.
- **Zeitaufwand der Erfassung:** Sehr häufig ist es auch aus zeitlichen Gründen nicht möglich, die ganze Grundgesamtheit zu erfassen. Vielfach ist der Zeitdruck bei Entscheidungen so gross, dass nicht genügend Zeit für eine vollständige Erfassung der Grundgesamtheit zur Verfügung steht. Z.B. Wahlprognosen, Deklaration des Notzustandes, usw.

8.2 Methoden der Stichprobengewinnung

Generell können zwei Arten von Stichproben unterschieden werden:¹⁶⁴

- **Zufallsstichprobe**¹⁶⁵: Diese Art von Stichproben wird so zusammengestellt, dass jeder Merkmalsträger in der Grundgesamtheit eine bekannte, von Null unterschiedliche Wahrscheinlichkeit hat, in die Stichprobe aufgenommen zu werden, d.h. **jeder Merkmalsträger in der Grundgesamtheit hat eine Chance in die Stichprobe aufgenommen zu werden.**
- **Nicht-Zufallsstichprobe**¹⁶⁶: Alle anderen Arten von Stichproben bezeichnet man als Nicht-Zufallsstichprobe, d.h. **nicht alle Merkmalsträger in der Grundgesamtheit haben eine Chance in die Stichprobe aufgenommen zu werden.** In solchen Fällen können die Resultate eine systematische Abweichung¹⁶⁷ aufweisen, d.h. das Resultat der Stichprobe kann nicht als eindeutiger Repräsentant der Grundgesamtheit herangezogen werden. Aus diesem Grund werden hier diese Arten der Stichproben nicht weiter behandelt.

Bei der Gewinnung einer Zufallsstichprobe gibt es **keine 'beste' Methode**, doch **alle Methoden haben ein Ziel, nämlich dass die Chance bzw. Zufallswahrscheinlichkeit bestimmt, welcher Merkmalsträger der Grundgesamtheit in die Stichprobe aufgenommen wird oder nicht.**

¹⁶³ siehe MASON, LIND, MARCHAL, 1967, ¹⁰2000, S. 258f.

¹⁶⁴ siehe MASON, LIND, MARCHAL, 1967, ¹⁰2000, S. 259.

¹⁶⁵ probability sampling

¹⁶⁶ nonprobability sampling

¹⁶⁷ bias

8.2.1 Einfache Zufallsstichprobe

Die meist verbreitetste Methode der Stichprobengewinnung ist die einfache Zufallsstichprobe¹⁶⁸. Dabei wird **die Stichprobe so gewonnen, dass jeder Merkmalsträger der Grundgesamtheit die gleiche Chance hat, in die Stichprobe aufgenommen zu werden**. Um dies zu erreichen, wird ähnlich vorgegangen wie bei der Zahlen-Lotterie. Eine angenehmere Methode besteht darin, dass man Zufallszahlentabellen benutzt, bei denen jede Stelle der angegebenen Zahlen die gleiche Chance bzw. Wahrscheinlichkeit aufweist. Eine systematische Abweichung¹⁶⁹ wird bei der Erstellung solcher Zufallszahlentabellen bewusst eliminiert.

Durch ein Tabellenkalkulationsprogramm können z.B. folgende Zufallszahlen 'generiert' werden:

Abb. 67: Zufallszahlen zwischen Null und 100'000

67'595	14'967	3'543	43'560	70'408	58'428	43'403
93'110	37'291	2'931	9'275	54'702	44'400	30'149
76'787	93'574	19'028	64'582	54'735	69'939	68'894
27'838	93'720	7'172	96'291	85'514	18'928	49'273
69'758	49'988	27'524	87'624	94'864	59'630	24'456
62'197	2'910	76'269	92'123	58'221	41'844	41'286
77'736	36'519	76'940	30'487	46'931	52'955	10'891
74'888	48'819	82'888	99'508	18'263	98'567	60'666

Die Problematik bei der Verwendung von Zufallszahlen besteht darin, dass die Merkmalsträger der Grundgesamtheit 'durchnummeriert' werden müssen, was sehr zeitaufwendig ist.

8.2.2 Systematische Zufallsstichprobe

Anstelle der oben erwähnten einfachen Zufallsstichprobe wird aus zeitlichen und damit auch finanziellen Gründen meistens die Methode der systematischen Zufallsstichprobe¹⁷⁰ gewählt. Dabei geht man wie folgt vor:

- Die **Merkmalsträger der Grundgesamtheit werden einer Methode nach geordnet** (z.B. alphabetisch, nach Datum usw.).
- **Rein zufällig wird der 'Startpunkt' für die Stichprobenauswahl festgelegt**.
- Nun wird **jeder x-te Merkmalsträger der Grundgesamtheit für die Stichprobe ausgewählt**.

Diese Methode sollte nicht gewählt werden, wenn in der Grundgesamtheit ein gewisses Schema bzw. 'Muster'¹⁷¹ vorhanden ist. Z.B. die Regale in einem Lager werden so gefüllt, dass die Artikel mit hohem Lagerumschlag vorne eingeordnet werden und diejenigen mit kleinem Lagerumschlag hinten. In diesem Fall ist es möglich, dass die Stichprobe eine systematische Abweichung aufweist.

8.2.3 Klumpenzufallsstichprobe

Bei der Klumpenzufallsstichprobe¹⁷² wird **die Grundgesamtheit zuerst in 'Klumpen' bzw. Teilmengen**¹⁷³ aufgeteilt. Häufig benutzt man geographische oder administrative Einheiten als Klumpen. **Anschließend werden aus jedem dieser Klumpen bzw. Teilmengen, Merkmalsträger für die Stichprobe ausgewählt**.

¹⁶⁸ simple random sampling

¹⁶⁹ bias

¹⁷⁰ systematic random sampling

¹⁷¹ pattern

¹⁷² stratified random sampling

¹⁷³ strata

Sowohl die Anzahl Merkmalsträger in den Klumpen als auch die Anzahl der ausgewählten Merkmalsträger aus den Klumpen kann proportional oder unproportional in Bezug auf die Grundgesamtheit sein. Jede vorhandene Unproportionalität der Stichprobe muss aber über entsprechende 'Gewichtungen' in eine Gleichförmigkeit überführt werden. Ansonsten weist die Stichprobe eine systematische Abweichung auf.

Der grosse Vorteil der Klumpenzufallsstichprobe besteht darin, dass sie billiger ist als die andern beiden und meist auch raschere Ergebnisse liefert. Parade-Beispiel für Klumpenzufallsstichproben sind die Hochrechnungen von Wahlergebnissen.

8.3 Zentraler Grenzwertsatz

Der 'zentrale Grenzwertsatz'¹⁷⁴ besagt, dass - **für eine grosse Stichprobe - die Verteilung der arithmetischen Mittel der Stichproben sehr ähnlich einer Normalverteilung ist.** Diese Approximation ist besser für grosse Stichproben als für kleine.

Der 'zentrale Grenzwertsatz' ist eine der nützlichsten Schlussfolgerungen in der Statistik! Die Verteilung des arithmetischen Mittels der Stichprobe gilt auch dann, wenn über die Verteilung der Grundgesamtheit nichts bekannt ist, d.h. der 'zentrale Grenzwertsatz' gilt für alle Verteilungen.

Der 'zentrale Grenzwertsatz' gilt aber nicht immer, sondern es sind folgende Voraussetzungen notwendig:

- Ist die Grundgesamtheit normalverteilt, dann gilt **für jede Stichprobengrösse**, dass die **Verteilung der arithmetischen Mittel der Stichproben auch normalverteilt** ist.
- Wenn die Grundgesamtheit symmetrisch, nicht aber normalverteilt ist, dann **entsteht schon ab einem Stichprobenumfang von ca. 10 eine normalverteilte Verteilung der arithmetischen Mittel der Stichproben.**
- Falls die Grundgesamtheit aber schief¹⁷⁵ ist oder grosse Häufigkeiten an den Enden aufweist, dann **entsteht erst ab einem Stichprobenumfang von ca. 30 eine normalverteilte Verteilung der arithmetischen Mittel der Stichproben.**

Nun stellt sich die Frage, welche Parameter diese 'Normalverteilung' der arithmetischen Mittel der Stichproben aufweist.

Es kann mathematisch bewiesen werden, dass folgender **Zusammenhang zwischen den Parametern der Grundgesamtheit und denjenigen der arithmetischen Mittel der Stichprobe** besteht:

$$\begin{aligned}\mu_{\bar{x}} &\approx \mu \\ \sigma_{\bar{x}} &\approx \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\end{aligned}$$

$\mu_{\bar{x}}$ steht für das arithmetische Mittel der arithmetischen Mittel der Stichproben

μ ist das arithmetische Mittel [mü] der Grundgesamtheit

$\sigma_{\bar{x}}$ steht für die Standardabweichung der arithmetischen Mittel der Stichproben

σ ist die Standardabweichung [sigma] der Grundgesamtheit

n ist der Stichprobenumfang

Verbal ausgedrückt bedeutet der obige Zusammenhang, dass unter den oben genannten Voraussetzungen das arithmetische Mittel der arithmetischen Mittel der Stichproben gleich dem arithmetischen Mittel der Grundgesamtheit sein muss und dass die Standardabweichung der arithmetischen Mittel der Stichproben mit zunehmendem Stichprobenumfang immer kleiner wird.

¹⁷⁴ central limit theorem

¹⁷⁵ skewed

Die obigen Ausführungen sollen anhand eines Beispiels¹⁷⁶ illustriert werden.

Ein Unternehmen hat nach mehrjähriger erfolgreicher Tätigkeit 40 Mitarbeiter, die folgende Dienstalter (auf ganze Jahre abgerundet) aufweisen:

Abb. 68: Urliste Dienstalter Mitarbeiter

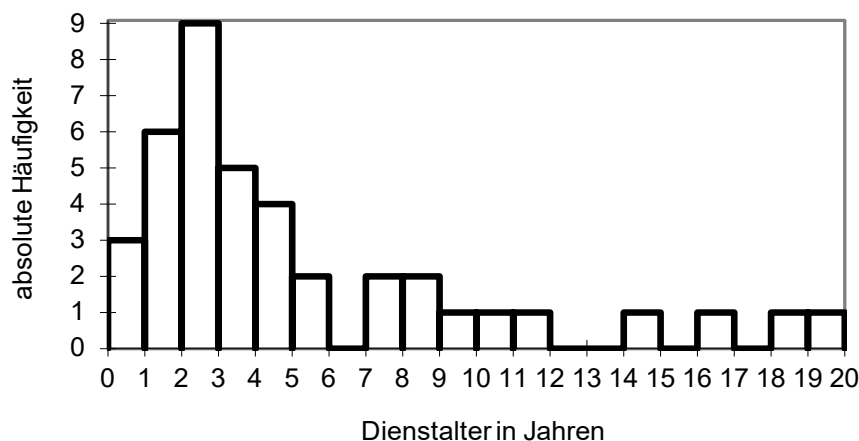
11	0	2	5
3	9	3	10
7	2	0	2
16	2	2	8
4	2	0	1
4	1	3	2
1	1	4	4
8	2	5	3
18	7	2	14
1	1	19	3

Da auf ganze Jahre abgerundet wurde, sind die Kategorienmitten (wichtig für grafische Darstellungen und Berechnungen) gegenüber obigen Angaben jeweils um 0.5 Jahre höher.

Das arithmetische Mittel dieser Grundgesamtheit ist 5.30 Dienstjahre und die Standardabweichung beträgt 4.86 Dienstjahre.

Die obige Übersicht ergibt folgendes Histogramm¹⁷⁷:

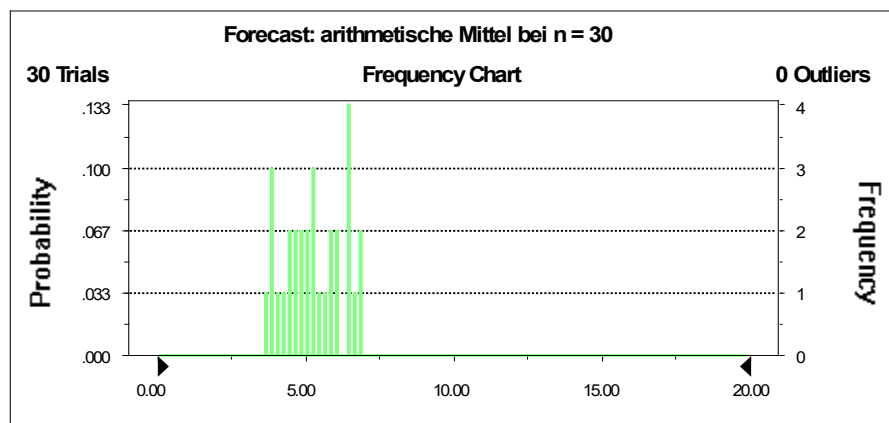
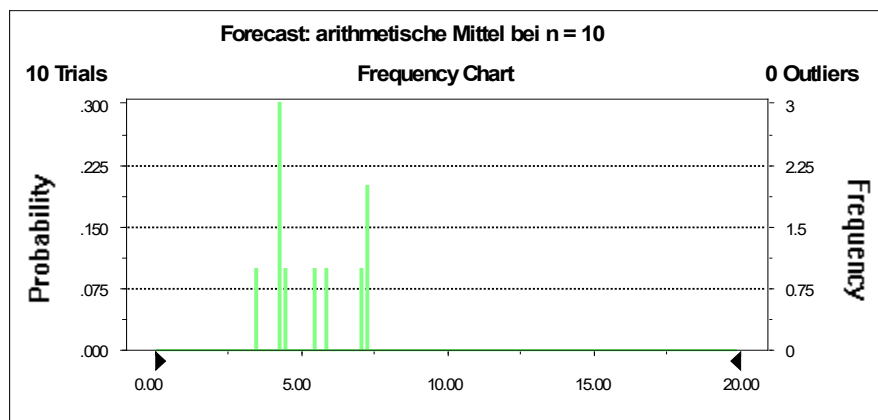
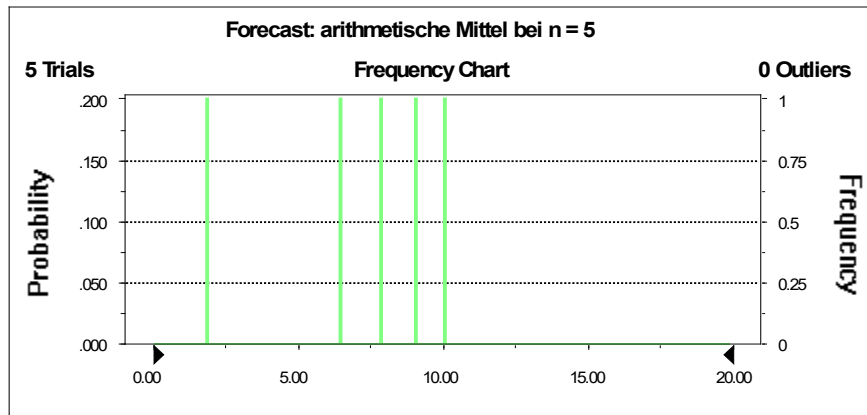
Abb. 69: Histogramm Dienstalter Mitarbeiter



¹⁷⁶ Daten-Set aus MASON, LIND, MARCHAL, 1967, ¹⁰2000, S. 273.; siehe auch MASON, LIND, MARCHAL, 1967, ¹⁰2000, S. 273ff. und SIEGEL, 1990, ⁴2000, S. 268ff.

¹⁷⁷ Das Histogramm wurde mit der Add-In-Statistik-Software 'StatPad®' (Skyline Technologies, Inc. in Zusammenarbeit mit Andrew F. SIEGEL) zur Tabellenkalkulationssoftware Excel® erstellt. Mit StatPad können viele in diesem Buch erwähnten 'statistischen' Probleme gelöst werden. Es wird auf der CD-ROM im Lehrbuch von SIEGEL kostenlos mitgeliefert.

Wenn nun aus dieser Grundgesamtheit rein zufällig (z.B. anhand von Zufallszahlen¹⁷⁸) Stichproben im Umfange von 5, 10 oder 30 gezogen würden, ergäbe dies z.B. folgendes Bild bezüglich der arithmetischen Mittel der (jeweiligen) Stichproben:



¹⁷⁸ Um den dabei relativ grossen Rechenaufwand zu minimieren, wurden im folgenden Beispiel anstelle von Zufallszahlen die Berechnungen anhand einer Monte-Carlo-Simulation vorgenommen. Hier wurde z.B. die benutzerfreundliche Add-In-Software 'Crystal Ball®' (Decisioneering, Inc., Denver-Colorado, USA) zur Tabellenkalkulationssoftware Excel® oder Lotus 1-2-3® verwendet. [Internet-Adresse: www.decisioneering.com]

Die oben aufgeführten Histogramme können wie folgt interpretiert werden:

- Obwohl die **Grundgesamtheit stark linkssteil, rechtsschief bzw. eine positive Schiefe** aufweist, **konvergiert das arithmetische Mittel** der arithmetischen Mittel der Stichproben **relativ rasch mit zunehmender Stichprobenzahl zum arithmetischen Mittel der Grundgesamtheit**.
- Die **Verteilung der arithmetischen Mittel** der arithmetischen Mittel der Stichproben **gleicht mit zunehmendem Stichprobenumfang immer mehr einer Normalverteilung**. Die weiter oben erwähnten Voraussetzungen, dass dies erst ab einem Stichprobenumfang von ca. 30 der Fall sein wird, ist hier klar ersichtlich.
- Weiter ist ersichtlich, dass die **Streuung bzw. Standardabweichung** der arithmetischen Mittel der arithmetischen Mittel **der Stichproben mit zunehmendem Stichprobenumfang immer kleiner wird**.
- Dabei ist auch feststellbar, dass **diese Abnahme der Standardabweichung der arithmetischen Mittel** der arithmetischen Mittel **bei zunehmendem Stichprobenumfang gemäss** der weiter oben erwähnten **'Gesetzmässigkeit'** geschieht. Werden im obigen Beispiel die $\sigma_{\bar{x}}$ aufgrund der Standardabweichung der Grundgesamtheit berechnet, ergibt dies folgende Werte in Dienstjahren:

$$\sigma_{\bar{x}} \approx \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \rightarrow \text{für } n = 5: \mathbf{2.17} \quad \rightarrow \text{für } n = 10: \mathbf{1.54} \quad \text{und für } n = 30: \mathbf{0.89}$$

Diese (theoretischen) Werte sind denjenigen, aus den Stichproben berechneten Werten sehr ähnlich.

8.4 Stichprobenverteilung und Konfidenz- bzw. Vertrauensintervalle

Beim letzten Kapitel gingen wir davon aus, dass jede Stichprobenentnahme sich aus dem arithmetischen Mittel einer gleich grossen Zahl von (Unter-)Stichproben zusammensetzt, d.h. jede Stichprobe war bereits ein arithmetisches Mittel bzw. eine Zufallsverteilung. In der Praxis wird aber nur eine (deterministische) Stichprobenentnahme vorgenommen. Gehen wir nun davon aus, dass dieser klar vorgegebene Stichprobenwert aber selbst rein zufällig entstanden ist, kann man 'schliessen', dass dieser klar vorgegebene Stichprobenwert eigentlich der *Durchschnitt* von rein zufälligen Möglichkeiten ist.

Somit kann man in der Praxis - wenn die Zufälligkeit der Stichprobengewinnung gewährleistet wird - davon ausgehen, dass der klar vorgegebene Stichprobenwert bei jeder Stichprobenentnahme das arithmetische Mittel desselben darstellt.

Aufgrund der oben erwähnten Herleitung ist es nun möglich, dass die Aussagen (und Voraussetzungen) des **'zentralen Grenzwertsatzes'** bei der Charakterisierung von Stichprobenverteilungen herangezogen werden können.

Somit gilt weiterhin folgender **Zusammenhang zwischen den Parametern der Grundgesamtheit und denjenigen der Stichprobe**:

$$\begin{aligned} \mu_x &= \bar{x} \approx \mu \\ \sigma_x &\approx \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \text{ wenn } \sigma \text{ der Grundgesamtheit bekannt} \\ s_x &\approx \frac{s}{\sqrt{n}}, \text{ wenn } \sigma \text{ der Grundgesamtheit unbekannt} \end{aligned}$$

$\mu_x, \bar{x}$ steht für das arithmetische Mittel der Stichprobe

μ ist das arithmetische Mittel [mü] der Grundgesamtheit

σ_x bzw. s_x steht für die Standardabweichung der Stichprobe bei bekanntem und unbekanntem ' σ '

σ ist die Standardabweichung [sigma] der Grundgesamtheit

s ist die Standardabweichung der Stichprobe

n ist der Stichprobenumfang

In den meisten praktischen Situationen ist es natürlich so, dass die Standardabweichung der Grundgesamtheit ' σ ' nicht bekannt ist und dafür eine alternative Grösse gesucht werden muss. Naheliegender ist es, dafür die Standardabweichung der Stichprobe ' s ' zu verwenden. Dieser 'Verlust an Information' kann aber nur durch einen 'grossen' Stichprobenumfang 'wettgemacht' werden. In der Fachliteratur ist man sich nicht einig, wie gross dieser 'grosse Stichprobenumfang' sein soll. Theoretisch richtig wäre ein Stichprobenumfang von $n > 100$, doch liegt die allgemeine Praxis eher bei einem Stichprobenumfang von $n > 30$.

Da man aus den Voraussetzungen weiss, dass bei genügend grosser Stichprobe ($n > 30$) die Stichprobenverteilung in eine Normalverteilung konvergiert, wird es möglich - anhand eines 'Umkehrschlusses' sowie der Standardnormalverteilung - Konfidenz- bzw. Vertrauensintervalle¹⁷⁹ bezüglich der Grundgesamtheitsparameter vorzunehmen.

Die Werte aus der Standardnormalverteilungstabelle von ' z ' = ± 1.96 bzw. ' z ' = ± 2.575 bedeuten, dass 95% bzw. 99% der (Eintritts-)Wahrscheinlichkeit innerhalb von ca. ± 2 mal bzw. ca. ± 2.6 mal die Standardabweichung um das arithmetische Mittel anzutreffen ist.

Wird diese Aussage nun anhand eines 'Umkehrschlusses' mit dem oben erwähnten Zusammenhang zwischen den Parametern der Grundgesamtheit und denjenigen der Stichprobe 'kombiniert' ergibt dies folgende Definition des 95%igen bzw. 99%igen Konfidenz- bzw. Vertrauensintervalls bezüglich des arithmetischen Mittels der Grundgesamtheit.

Das 95%ige Vertrauensintervall des arithmetischen Mittels der Grundgesamtheit ist somit:

$$\mu = \bar{x} \pm z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{bzw.} \quad \bar{x} \pm z \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \quad ; \text{ wobei 'z' hier der kritische z-Wert darstellt}$$

$$\mu = \bar{x} \pm 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{bzw.} \quad \bar{x} \pm 1.96 \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Das 99%ige Vertrauensintervall des arithmetischen Mittels der Grundgesamtheit ist somit:

$$\mu = \bar{x} \pm z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{bzw.} \quad \bar{x} \pm z \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \quad ; \text{ wobei 'z' hier der kritische z-Wert darstellt}$$

$$\mu = \bar{x} \pm 2.575 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{bzw.} \quad \bar{x} \pm 2.575 \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

Die obigen Ausführungen sollen an einem Beispiel¹⁸⁰ verdeutlicht werden.

Bei einem Zufallsexperiment werden 256 Manager des mittleren Kaders befragt, wie gross ihr jährliches Einkommen ist. Die dabei ermittelten Stichprobenparameter sind wie folgt: arithmetisches Mittel = CHF 90'000, Standardabweichung = CHF 4'000.

Die Frage lautet nun: In welchem Bereich liegt das durchschnittliche jährliche Einkommen aller Manager des mittleren Kaders, wenn man eine Fehlertoleranz von maximal 5% nicht überschreiten möchte?

Die Lösung zur Frage kann wie folgt - aufgrund der obigen Definitionen - ermittelt werden:

$$\mu = \bar{x} \pm 1.96 \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = 90'000 \pm 1.96 \cdot \frac{4'000}{\sqrt{256}} =$$

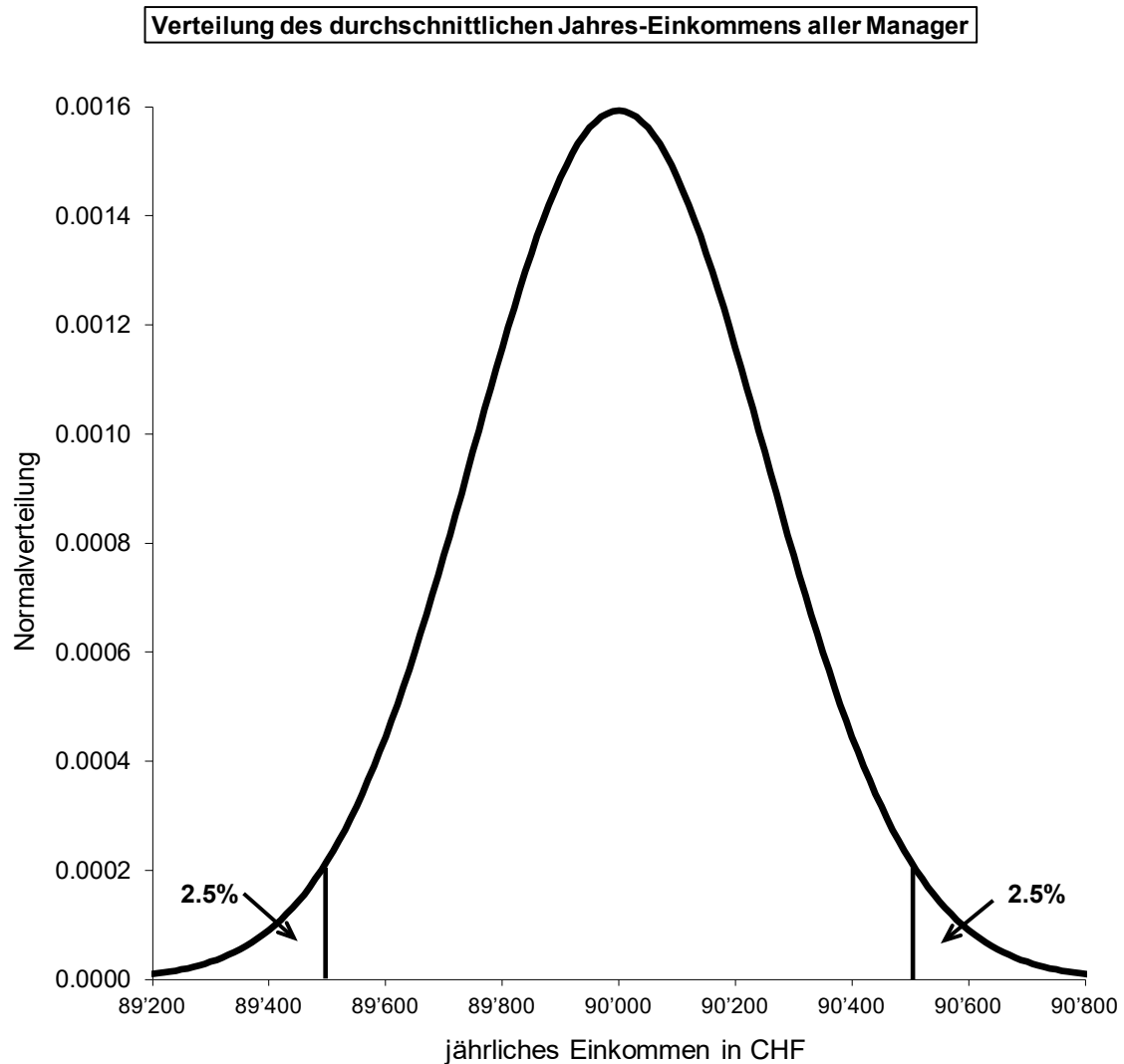
$$= 90'000 \pm 490$$

¹⁷⁹ confidence interval

¹⁸⁰ siehe auch MASON, LIND, MARCHAL, 1967, ¹⁰2000, S. 282f.

Es kann also gesagt werden, dass das durchschnittliche jährliche Einkommen aller Manager zwischen CHF 89'510 und CHF 90'490 sein dürfte. Diese Aussage gilt aber nicht für 100% der Manager, sondern lediglich für 95% von ihnen (siehe auch untenstehende grafische Darstellung).

Abb. 70: Normalverteilung des durchschnittlichen Jahres-Einkommens aller Manager



Die gleiche Vorgehensweise bezüglich **des 95%igen bzw. 99%igen Konfidenz- bzw. Vertrauensintervalls** bezüglich **des arithmetischen Mittels der Grundgesamtheit** kann nun aber **auch bei Prozentanteilen bzw. Proportionen** angewendet werden. Die Ausgangsbasis dafür ist die Binomialverteilung (siehe Kapitel 7.1.4).

Das **95%ige Vertrauensintervall des arithmetischen Mittels der Grundgesamtheit bei Prozentanteilen bzw. Proportionen** ist somit:

$$\pi = p \pm z \cdot \sqrt{\frac{\pi \cdot (1 - \pi)}{n}} \quad \text{bzw.} \quad p \pm z \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1 - p)}{n}} \quad ; \text{ wobei 'z' hier der}$$

kritische z-Wert darstellt

$$\pi = p \pm 1.96 \cdot \sqrt{\frac{\pi \cdot (1 - \pi)}{n}} \quad \text{bzw.} \quad p \pm 1.96 \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1 - p)}{n}}$$

p steht für das arithmetische Mittel der Stichprobe ausgedrückt als

Prozentanteil bzw. Proportion und entspricht dem Wert $\left(\frac{x}{n}\right)$

π ist das arithmetische Mittel der Grundgesamtheit ausgedrückt als Prozentanteil bzw. Proportion [pi]

n ist der Stichprobenumfang

Das **99%ige Vertrauensintervall des arithmetischen Mittels der Grundgesamtheit bei Prozentanteilen bzw. Proportionen** ist somit:

$$\pi = p \pm z \cdot \sqrt{\frac{\pi \cdot (1 - \pi)}{n}} \quad \text{bzw.} \quad p \pm z \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1 - p)}{n}} \quad ; \text{ wobei 'z' hier der}$$

kritische z-Wert darstellt

$$\pi = p \pm 2.575 \cdot \sqrt{\frac{\pi \cdot (1 - \pi)}{n}} \quad \text{bzw.} \quad p \pm 2.575 \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1 - p)}{n}}$$

Die obigen Ausführungen sollen an einem Beispiel¹⁸¹ verdeutlicht werden.

Zwei Gewerkschaften wollen sich zusammenschliessen. Bei einer Umfrage (rein zufällige Stichprobe) hat sich herausgestellt, dass 1'500 von den 2'000 ($p = 75\%$) befragten Gewerkschaftern sich für den Zusammenschluss aussprachen. Wie gross dürfte das Konfidenzintervall des Anteils der Befürworter des Zusammenschlusses von allen Gewerkschaften sein, wenn ein Vertrauensniveau von 99% unterstellt wird?

Die Lösung zur Frage kann wie folgt - aufgrund der obigen Definitionen - ermittelt werden:

$$\begin{aligned} \pi &= p \pm 2.575 \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1 - p)}{n}} = 0.75 \pm 2.575 \cdot \sqrt{\frac{0.75 \cdot 0.25}{2'000}} = \\ &= 0.75 \pm 0.0249 \end{aligned}$$

Es kann also gesagt werden, dass der Anteil der Befürworter aller Gewerkschafter - bei 99%iger Wahrscheinlichkeit - zwischen 72.51% und 77.49% sein dürfte. Wäre eine Zweidrittelmehrheit für einen solchen Beschluss statutarisch notwendig, dürfte dieser positiv verlaufen.

¹⁸¹ siehe auch MASON, LIND, MARCHAL, 1967, ¹⁰2000, S. 287.

8.5 Bestimmung des 'optimalen' Stichprobenumfangs¹⁸²

Bei der Beantwortung der Fragestellung der Konfidenz- bzw. Vertrauensintervalle stellt sich häufig auch folgende Frage: **Wie gross muss eigentlich der 'optimale' Stichprobenumfang sein?** Diese Frage stellt sich einerseits, weil ein zu grosser Stichprobenumfang eine Verschwendung an 'Geld' bei der Datenerhebung bedeutet, und andererseits ein zu kleiner Stichprobenumfang zu wenig schlüssigen Ergebnissen führt.

Der 'optimale' Stichprobenumfang hängt von drei Faktoren ab, nämlich

- vom **Konfidenz- bzw. Vertrauensniveau** der anzustrebenden Aussage,
- von der **absoluten, maximal zulässigen Abweichung** und
- von der **Streuung** der Grundgesamtheit.

Das anzustrebende Vertrauensniveau ergibt sich aus der 'Güte' bezüglich der Beantwortung des Sachverhalts. Daraus abgeleitet ergibt z.B. ein Vertrauensniveau von 95% einen kritischen z-Wert von ± 1.96 , ein solches von 99% einen kritischen z-Wert von ± 2.575 . Aufgrund der Ausführungen des letzten Kapitels ist auch klar, dass ein grosses Vertrauensniveau mit einem grossen Stichprobenumfang einhergehen muss.

Die maximal zulässige Abweichung ist der absolute Wert, der vom arithmetischen Mittel der Stichprobe dazu- und abgezählt wird, um damit die Eckpunkte des Vertrauensintervalls zu ermitteln. Es ist der absolute maximale Wert, den man gewillt ist zu tolerieren und somit gleich der Hälfte des ganzen Vertrauensintervalls. Abgeleitet aus dem letzten Kapitel ist auch klar, dass eine kleine absolute Abweichung mit einem grossen Stichprobenumfang 'erkauft' werden muss.

Der dritte Faktor ist die Streuung bzw. die Standardabweichung der Grundgesamtheit. Diese zu bestimmen ist nicht immer einfach. Dazu bedient man sich diverser Methoden: durch das Heranziehen vergleichbarer früherer Untersuchungen, aufgrund von Schätzungen basierend z.B. auf dem Tschebyscheffschen Theorem oder dem empirischen Gesetz (siehe Kapitel 5.2.8 und 5.2.9) sowie aufgrund eigens dafür durchgeführter Pilotstudien.

¹⁸² siehe auch MASON, LIND, MARCHAL, 1967, ¹⁰2000, S. 290ff.

Durch Umformungen der im letzten Kapitel aufgeführten Definitionen kann der **'optimale' Stichprobenumfang zur Bestimmung der Konfidenz- bzw. Vertrauensintervall des arithmetischen Mittels der Grundgesamtheit [bzw. der Prozentanteile oder Proportionen desselben]** wie folgt ermittelt werden:

$$n = \left(\frac{z \cdot s}{E} \right)^2 \quad \text{bzw.} \quad \left[n = p \cdot (1-p) \cdot \left(\frac{z}{E} \right)^2 \right]$$

n steht für den zu ermittelnden 'optimalen' Stichprobenumfang

z ist der kritische z -Wert bezüglich des gewählten Konfidenz- bzw. Vertrauensniveaus

s ist die (geschätzte) Standardabweichung der Grundgesamtheit

p ist das (geschätzte) arithmetische Mittel der Grundgesamtheit ausgedrückt als Prozentanteil bzw. Proportion

E ist die absolute, maximal zulässige Abweichung

Die obigen Ausführungen werden an einem Beispiel¹⁸³ verdeutlicht.

Es sei vorgesehen, eine Untersuchung bezüglich des steuerbaren Einkommens in einer Gemeinde durchzuführen. Die absolute, maximal zulässige Abweichung bei einem Vertrauensniveau von 95% betrage CHF 150. Aufgrund früherer Studien werde die diesbezügliche Standardabweichung auf CHF 1'500 geschätzt. Wie gross ist auf der Basis der obigen Annahmen der 'optimale' Stichprobenumfang?

Der 'optimale' Stichprobenumfang berechnet sich gemäss obiger Formel wie folgt:

$$n = \left(\frac{z \cdot s}{E} \right)^2 = \left(\frac{1.96 \cdot 1'500}{150} \right)^2 = (19.6)^2 = 384.16 \quad \text{bzw.} \quad 385$$

¹⁸³ siehe auch MASON, LIND, MARCHAL, 1967, ¹⁰2000, S. 291f.

8.6 Repetitionsfragen

8.6.1 Bestimmung des Vertrauensintervalls des tatsächlichen, durchschnittlichen Vitamingehalts einer bestimmten Speise

Ein Biochemiker will den Vitamingehalt einer bestimmten Speise schätzen und nimmt eine Stichprobe im Umfang von $n = 64$. Das arithmetische Mittel des Vitamingehalts der Stichprobe pro 100 g wird von ihm als 11 mg und die Standardabweichung als 3 mg festgestellt.

Geben Sie das Vertrauensintervall an, in dem mit 95%iger Wahrscheinlichkeit der tatsächliche, durchschnittliche Vitamingehalt dieser Speise (also der Vitamingehalt der Grundgesamtheit) liegt. [Hinweis: Der vorliegende Stichprobenumfang kann als gross angesehen werden.]

8.6.2 Automat zur Herstellung von Metallteilen¹⁸⁴

Ein Automat zur Herstellung von Metallteilen ist für die Fertigung von Metallstäben mit der Länge von 80 mm eingerichtet. Aufgrund der technischen Informationen (und Garantieverpflichtungen) des Automaten-Herstellers kann die Länge der auf dem Automaten gefertigten Metallstäbe als normalverteilt bezeichnet werden: das arithmetische Mittel betrage dabei 80 mm und die Standardabweichung 0.40 mm. Aus der Tagesproduktion des Automaten soll eine (Zufalls-)Stichprobe im Umfang von 36 gezogen werden, um die Metallstablängen nachzumessen.

- In welchem Vertrauensintervall wird sich das arithmetische Mittel der (Zufalls-)Stichprobe im Umfang von 36 bewegen, falls ein Vertrauensniveau von 95% unterstellt wird?
- Das tatsächlich festgestellte arithmetische Mittel der (Zufalls-)Stichprobe im Umfang von 36 betrage 80.2 mm. Welche generelle Aussage können Sie diesbezüglich machen?

¹⁸⁴ siehe auch ECKSTEIN, 1998, S. 79f+178.

8.6.3 Bestimmung des Vertrauensintervalls des tatsächlichen, durchschnittlichen Milliliter-Inhalts von 3.5 dl Soft-Drink-Flaschen¹⁸⁵

Eine Stichprobe im Umfange von 16 Soft-Drink Flaschen à 3.5dl ergab folgende Inhalts-Messungen (inkl. Stichproben-Parameter): Es kann angenommen werden, dass der Milliliter-Inhalt von 3.5-dl-Soft-Drink-Flaschen normalverteilt ist.

Inhalt in ml

350
352
351
354
350
351
351
352
348
352
351
349
350
351
350
350

Folgende Parameter wurden aus den 16 Stichproben berechnet:

Standardabweichung: 1.3904

Arithmetisches Mittel: 350.7500

Wie gross ist das Vertrauensintervall des durchschnittlichen Milliliter-Inhalts der Soft-Drink-Flaschen der Grundgesamtheit bei einem Vertrauensniveau von 95% bzw. 99%?

¹⁸⁵ siehe auch UPTON, COOK, 1996, ²1997, S. 392.

9 HYPOTHESENTESTS

Mit der Herleitung des zentralen Grenzwertsatzes und dessen Anwendung bei der Stichprobenverteilung des Konfidenz- bzw. Vertrauensintervalls wurden die Grundbausteine für die weiteren Methoden und Anwendungen der induktiven bzw. schliessenden Statistik gelegt. **Im folgenden Kapitel geht es um die Frage, ob gewisse Aussagen** (z.B. ob ein gewisser Auto Pneu länger als 15'000 km den gesetzlichen Vorschriften entspricht) **unter Anwendung von statistischen Methoden behauptet werden können oder ob die Aussage 'verworfen' werden muss.** Diese Fragestellung wird auch als Hypothesentest¹⁸⁶ bezeichnet.

In einem ersten Schritt wird dargelegt, was unter einem Hypothesentest zu verstehen ist. Dann wird erläutert, welche Schritte vorzunehmen sind, damit ein Hypothesentest durchgeführt werden kann. Anschliessend werden die wichtigsten Arten von Hypothesentest vorgestellt. Am Ende wird noch näher auf die möglichen Fehler beim Hypothesentest eingegangen.

9.1 Hypothese und Hypothesentest

Eine Hypothese¹⁸⁷ ist eine Aussage¹⁸⁸ über eine Grundgesamtheit. Die Daten werden anschliessend auf die Vernünftigkeit¹⁸⁹ der Aussage hin überprüft. **D.h. bei der statistischen Analyse wird zuerst eine Behauptung¹⁹⁰ gemacht, d.h. man stellt eine Hypothese auf. Im Anschluss daran werden Tests durchgeführt, welche die Behauptung verifizieren oder feststellen, dass die Behauptung falsch ist.**

Am einfachsten wäre es, wenn man als Test die Grundgesamtheit untersuchen würde. Damit könnte man mit fast 100%iger Wahrscheinlichkeit die Aussage bzw. Behauptung verifizieren. Eine 100%ige Wahrscheinlichkeit gibt es nie, da immer Erfassungsfehler bei der Grundgesamtheit auftreten können. In den meisten Fällen ist es aber nicht möglich, die ganze Grundgesamtheit zu erfassen (siehe Kapitel 8.1). Als 'zweitbeste Lösung' bedient man sich einer Stichprobe aus der Grundgesamtheit.

Der Hypothesentest¹⁹¹ **beginnt mit einer Aussage oder einer Annahme¹⁹² über einen Parameter** (z.B. das arithmetische Mittel) **der Grundgesamtheit.** Um die Gültigkeit bzw. Zulässigkeit¹⁹³ der Aussage zu testen, muss (mindestens) eine **Stichprobe aus der Grundgesamtheit** gezogen werden. Aufgrund dieser Stichprobe wird nun anhand statistischer Methoden der **Test bezüglich der Aussage über den Parameter der Grundgesamtheit** durchgeführt.

¹⁸⁶ tests of hypothesis

¹⁸⁷ hypothesis

¹⁸⁸ statement

¹⁸⁹ reasonableness

¹⁹⁰ claim

¹⁹¹ hypothesis testing

¹⁹² assumption

¹⁹³ validity

9.2 Fünf Schritte des Hypothesentests

Um den Hypothesentest zu systematisieren, sind fünf Schritte notwendig, nämlich¹⁹⁴

- Festlegung der Null-Hypothese¹⁹⁵ (H_0) und der Alternativ-Hypothese¹⁹⁶ (H_1),
- Festlegung des Signifikanzniveaus¹⁹⁷,
- Berechnung der Test-Statistik¹⁹⁸,
- Formulierung der Entscheidungsregel¹⁹⁹ und
- Fälligkeit der Entscheidung.

1. Schritt: Festlegung der Null-Hypothese (H_0) und der Alternativ-Hypothese (H_1)

Der erste Schritt beim Hypothesentest besteht darin, **die Hypothese, die getestet werden soll, aufzustellen**. Sie wird auch als die **Null-Hypothese (H_0)** bezeichnet. Dabei steht 'H' für 'Hypothese' und '0' impliziert 'keine Differenz'. Normalerweise beinhaltet die Null-Hypothese einen Begriff wie 'kein' oder 'nicht', der bedeutet, dass keine Veränderung festgestellt werden kann. **Im Normalfall wird die Null-Hypothese so festgelegt, dass sie den Grundgesamtheitsparameter 'testet', nämlich diejenige Situation, die man normalerweise befürchtet, dass sie weiterhin eintritt.** Umgekehrt ausgedrückt ist die Alternativ-Hypothese normalerweise, die Hypothese die man am liebsten hätte, dass sie zutrifft.

Die Null-Hypothese ist eine Aussage, die nicht zurückgewiesen²⁰⁰ werden kann, wenn die Stichproben-Daten nicht genügend überzeugende Evidenz bereitstellen, dass die Null-Hypothese falsch ist. Anders ausgedrückt, eine Null-Hypothese kann nie 'bewiesen' werden, bzw. man kann nie sagen, dass sie 'wahr' ist. Wenn keine genügend überzeugende Evidenz für das Verwerfen der Null-Hypothese vorhanden ist, kann damit nicht 'bewiesen' werden, dass die Null-Hypothese 'wahr' ist. Um die Null-Hypothese zu beweisen, müssten die Parameter der Grundgesamtheit bekannt sein. Dies ist aber meistens nicht möglich (siehe Kapitel 8.1).

Die Alternativ-Hypothese beschreibt, welchen Schluss man zieht, wenn die Null-Hypothese verneint wird (Bezeichnung: ' H_1 '). Anders ausgedrückt, die Alternativ-Hypothese wird dann akzeptiert, wenn die Stichproben-Daten genügend überzeugende Evidenz bereitstellen, dass die Null-Hypothese verworfen werden muss.

2. Schritt: Festlegung des Signifikanzniveaus

Nachdem man die Null-Hypothese und Alternativ-Hypothese aufgestellt hat, geht es darum, das Signifikanzniveau festzulegen. **Unter dem Signifikanzniveau versteht man die Wahrscheinlichkeit, dass man die Null-Hypothese verwirft, obwohl sie tatsächlich 'wahr' ist.** Sie wird auch (statistische) Fehlerwahrscheinlichkeit genannt. Das Signifikanzniveau entspricht wertmässig auch der Ergänzung des Vertrauensniveaus auf Eins bzw. (1 - Vertrauensniveau).

Das Signifikanzniveau wird mit ' α ' [Alpha] bezeichnet und manchmal auch Risikoniveau genannt. Diese letzte Bezeichnung gibt sogar besser die Bedeutung des Signifikanzniveaus wieder, nämlich das Risiko das eingegangen wird, die Null-Hypothese zu verwerfen, wenn letztere in Wahrheit richtig ist.

¹⁹⁴ siehe auch MASON, LIND, MARCHAL, 1967, ¹⁰2000, S. 291f.

¹⁹⁵ null hypothesis

¹⁹⁶ alternative hypothesis

¹⁹⁷ level of significance

¹⁹⁸ test statistic

¹⁹⁹ decision rule

²⁰⁰ reject

Es gibt nicht ein einheitliches Signifikanzniveau für alle Tests. Üblich ist ein Signifikanzniveau von 0.05 bzw. 5% bei Konsumentenbefragungen, 1% bei der Qualitätssicherung und 10% bei politischen Wahlen. **Wichtig ist grundsätzlich nicht die Höhe des Signifikanzniveaus, sondern dass dieses aufgrund der Sachlage vor der Stichprobengewinnung und Formulierung der Entscheidungsregel festgelegt wird.**

3. Schritt: Berechnung der Test-Statistik

Die Test-Statistik ist ein - aufgrund der Informationen aus der Stichprobe - nach statistischen Methoden berechnete Prüfgrösse, mit dem Ziel festzustellen, ob die Null-Hypothese zu verwerfen ist.

Im Gegensatz zur Berechnung des Konfidenz- bzw. Vertrauensintervalls (siehe Kapitel 8.4), aber mit der gleichen statistischen Herleitung (siehe Kapitel 8.3 und 8.4), werden bei der Test-Statistik nicht 'Eckpunkte' berechnet, sondern nur eine Prüfgrösse. Die Ermittlung dieser Test-Statistik erfolgt sehr ähnlich der Berechnung des z-Wertes bei der Standardnormalverteilung (siehe Kapitel 7.2.1). Aus diesem Grund benennt man diesen Wert auch 'standardisierte Prüfgrösse'.

Der Hypothesentest kann aber auch anhand des Konfidenz- bzw. Vertrauensintervalls durchgeführt werden. Bei dieser Vorgehensweise wird als 'Test' überprüft, ob z.B. das arithmetische Mittel der Grundgesamtheit ' μ ' im Konfidenz- bzw. Vertrauensintervall liegt oder ausserhalb. Liegt ' μ ' innerhalb, so wird die Null-Hypothese nicht verworfen (d.h. die Abweichung ist möglicherweise rein zufällig entstanden), liegt ' μ ' ausserhalb, wird die Null-Hypothese verworfen. Diese Methode des Hypothesentests - obwohl einleuchtender - sei hier nicht speziell weiterverfolgt, da sie in den meisten statistischen Lehrmitteln nicht angewendet wird.

Die Test-Statistik bezüglich des arithmetischen Mittels der Grundgesamtheit aufgrund einer grossen Stichprobe ist z.B.

$$z^* = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \quad \text{bei bekannter Standardabweichung der Grundgesamtheit '}\sigma\text{'}$$

$$z^* = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \quad \text{bei unbekannter Standardabweichung der Grundgesamtheit '}\sigma\text{'}$$

z^* steht für die standardisierte Prüfgrösse bzw. Test-Statistik bezüglich Standardnormalverteilung

σ ist die Standardabweichung [sigma] der Grundgesamtheit

s ist die Standardabweichung der Stichprobe

μ ist das arithmetische Mittel [mü] der Grundgesamtheit

$\bar{x}$ ist das arithmetische Mittel der Stichprobe

n steht für den Stichprobenumfang

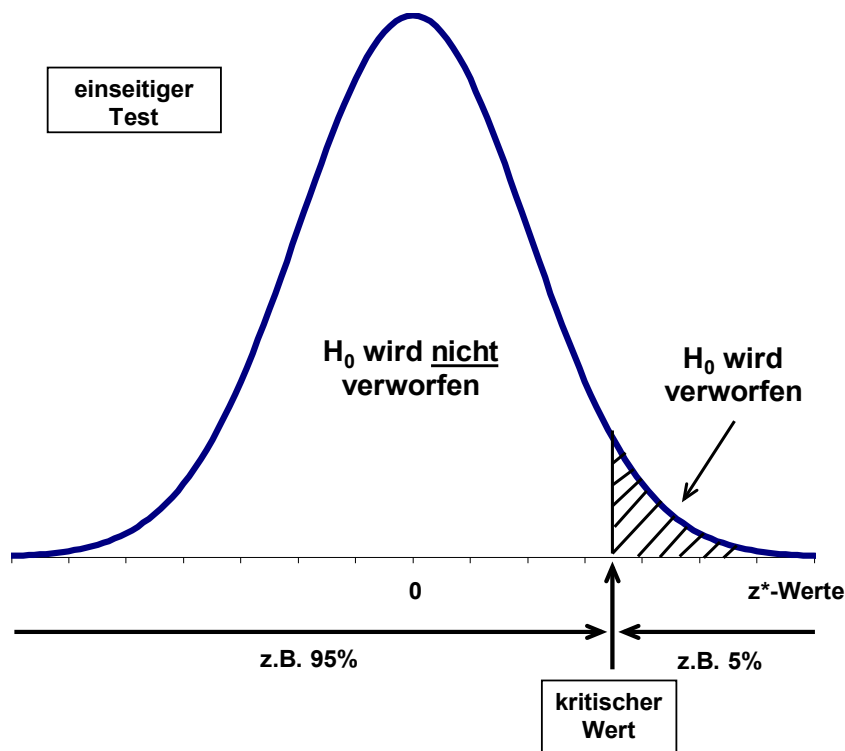
4. Schritt: Formulierung der Entscheidungsregel

Die Entscheidungsregel beim Hypothesentest ist eine Aussage darüber, unter welchen Bedingungen die Null-Hypothese verworfen wird und unter welchen Bedingungen sie nicht verworfen wird.

Der Bereich bzw. die Fläche, in der die Null-Hypothese verworfen wird, enthält all diejenigen Werte, die so gross oder klein sind, dass die Eintrittswahrscheinlichkeit sehr gering ist, falls die Null-Hypothese vorausgesetzt wird. **Umgekehrt ausgedrückt liegt die standardisierte Prüfgrösse (siehe 3. Schritt) im Bereich bzw. in der Fläche, in der die Null-Hypothese nicht verworfen wird.**

Die obigen Ausführungen werden anhand einer Darstellung visualisiert.

Abb. 71: Entscheidungsregel einseitiger Hypothesentest



Den sogenannten 'kritischen Wert' erhält man, indem entsprechend der beim Test unterstellten Verteilungsfunktion der Parameter (hier z.B. die Normalverteilung) der diesbezügliche, das Signifikanzniveau (siehe 2. Schritt) widerspiegelnde standardisierte Wert ermittelt bzw. aus der entsprechenden Tabelle herausgelesen wird (hier z.B. der z-Wert).

Der **kritische Wert** bei der oben aufgeführten Darstellung ist **1.645**. Rechts von diesem Wert sind gemäss der Standardnormalverteilungstabelle noch 5% der (Eintritts-)Wahrscheinlichkeiten anzu-treffen.

5. Schritt: Füllen der Entscheidung

Der letzte Schritt beim Hypothesentest besteht darin zu entscheiden, ob die Null-Hypothese verworfen wird oder nicht.

Falls die standardisierte Prüfgrösse 'z*' z.B. 2.7 betragen und ein kritischer Wert von 1.645 herausgelesen würde, müsste die Null-Hypothese bei einem Signifikanzniveau von 5% verworfen werden. **Der Entscheid, die Null-Hypothese zu verwerfen, wurde deshalb gefällt, da die standardisierte Prüfgrösse im 'Ablehnungsbereich' der Null-Hypothese liegt** und deshalb die Wahrscheinlichkeit sehr gering ist (auf jeden Fall geringer als 5%), dass ein solcher Wert im Umfange von 2.7 rein zufällig entsteht. Die Alternativ-Hypothese wird somit angenommen, da man 'schliesst', dass hier mehr als Zufall im Spiel ist.

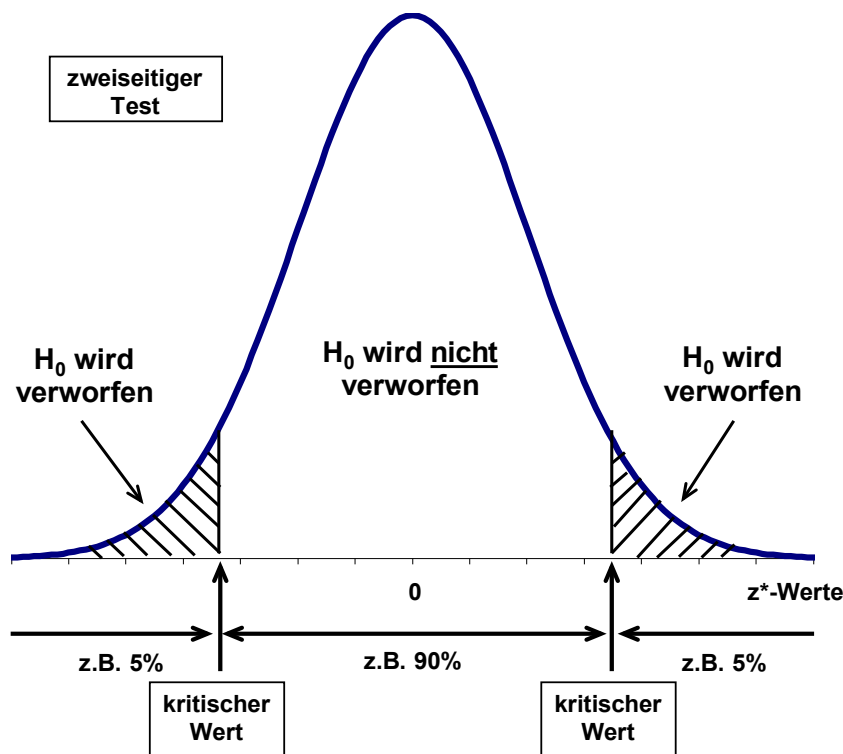
9.3 Ein- und zweiseitige Signifikanztests²⁰¹

Die obige Darstellung ist ein einseitiger Test, da sich der Ablehnungsbereich der Null-Hypothese nur am rechten äusseren Ende befindet. Ein Beispiel dafür wäre, wenn ein Unternehmen untersuchen würde, ob eine Abpackmaschine zu viel Material einfüllt oder nicht. Es wird hier nicht gefragt bzw. getestet, ob die Maschine möglicherweise auch zu wenig Material einfüllt.

Bei sehr vielen Fragestellungen ist man sich aber nicht im klaren, ob nicht sowohl eine 'unerwünschte' Abweichung nach oben, als auch eine solche nach unten, möglich ist. Ein Beispiel dafür wäre, wenn ein Reifenproduzent testen möchte, ob ein gewisser Reifentyp eine vorgegebene Kilometerleistung aufweist oder nicht. Hier wäre sowohl eine Abweichung nach oben als auch eine solche nach unten möglich. **In all diesen Fällen wird ein zweiseitiger Signifikanztest durchgeführt.** Dadurch ergeben sich neu 'zwei kritische Werte' und auch zwei Ablehnungsbereiche der Nullhypothese, nämlich sowohl am linken äusseren Ende als auch am rechten äusseren Ende.

Die obigen Ausführungen werden anhand einer Darstellung visualisiert.

Abb. 72: Entscheidungsregel zweiseitiger Hypothesentest



²⁰¹ one-tailed and two-tailed tests of significance

9.4 Fehler des Typs I und Typs II²⁰²

Im Zusammenhang mit dem Signifikanzniveau (Fehler des Typs I bzw. ' α ' [Alpha]) stellt sich schnell auch die Frage, wie gross der Fehler ist, wenn die Null-Hypothese akzeptiert wird, obwohl letztere eigentlich falsch ist (Fehler des Typs II bzw. ' β ' [Beta]).

Die beiden Typen von Fehlern stellen das Total der Fehlermöglichkeit bei einer Entscheidung dar.

Die untenstehende Darstellung soll dies verdeutlichen.

Abb. 73: Fehler des Typs I (α) und Typ II (β)

Null-Hypothese	H_0 wird nicht verworfen	H_0 wird verworfen
H_0 ist richtig	richtige Entscheidung	Fehler des Typs I [α]
H_0 ist falsch	Fehler des Typs II [β]	richtige Entscheidung

Anhand des westlichen Rechtssystems bzw. Strafgerichtswesens werden die obigen Ausführungen verdeutlicht.

"Vor Gericht wird über die Schuld oder Unschuld eines Angeklagten entschieden. Schuld oder Unschuld sind die beiden möglichen *alternativen Zustände*, in denen sich ein Angeklagter befinden kann. Der *wahre Zustand* soll von den Richtern herausgefunden werden. Dazu müssen sie sich auf Beweise, Indizien oder andere Evidenz stützen.

Im Rechtsstaat baut das Gerichtsverfahren auf der (*Null-*)*Hypothese* auf, der Angeklagte befinde sich im Zustand der Unschuld. Diese Hypothese muss falsifiziert werden, bevor jemand schuldig gesprochen wird ("schuldig" entspricht der *alternativen Hypothese*). Nur wenn erdrückende Evidenz vorliegt, gilt die Hypothese "Unschuld" als falsifiziert, und es muss schuldig gesprochen werden. Die Schwelle für einen Schuldspruch wird im Rechtsstaat sehr hoch angesetzt. Man nimmt es in Kauf, dass bei einem in Wahrheit schuldigen Angeklagten die Schwelle mangels als stichhaltig angesehener Beweise nicht überschritten wird und der Richter auf Freispruch entscheiden muss ("in dubio pro reo") [β -Fehler]. Umgekehrt ist es trotz Hochsetzung der Schwelle nicht vollständig zu vermeiden, dass ein in Wahrheit unschuldiger Angeklagter durch das zufällige Zusammentreffen ihn belastender Umstände verurteilt wird [α -Fehler]. Man könnte so etwas nur vermeiden, wenn man die Schwelle noch höher setzen würde, doch könnte man dann nur noch wenige Angeklagte verurteilen. Wollte man umgekehrt alle in Wirklichkeit Schuldigen bestrafen, so müsste man die Schwelle senken und dafür den Preis bezahlen, dass mit höherer *Irrtumswahrscheinlichkeit* eine Schuldigsprechung von Unschuldigen auftritt. Es bleibt also letztlich nichts anderes übrig, als die "Kosten" der einen gegen die "Kosten" der anderen Fehlentscheidung abzuwägen und auf diese Weise einen optimalen Schwellenwert festzulegen."²⁰³

Die untenstehende Darstellung soll dies verdeutlichen.

Zustand des Angeklagten	Freispruch des Angeklagten	Schuldspruch des Angeklagten
Angeklagter ist unschuldig	richtige Entscheidung	Justizirrtum zuungunsten des Angeklagten [α]
Angeklagter ist schuldig	Justizirrtum zugunsten des Angeklagten [β]	richtige Entscheidung

²⁰² type I error and type II error

²⁰³ BOHLEY, ⁶1996, S. 568.

9.5 Beispiel eines Hypothesentests

Im folgenden Beispiel wird ein Hypothesentest mit Fehler des Typs I bezüglich des arithmetischen Mittels der Grundgesamtheit aufgrund einer grossen Stichprobe und unbekannter Standardabweichung der Grundgesamtheit durchgeführt.

Die Warenhauskette Simpson²⁰⁴ hat eine eigene Kreditkarte, mit der die Kunden während des Monats frei einkaufen können und erst am Ende des Monats die getätigten Einkäufe aufgrund einer Sammelrechnungsstellung bezahlen müssen. Der Kreditmanager der Warenhauskette möchte überprüfen, ob der monatliche, durchschnittlich ausstehende bzw. unbezahlte (Kredit-)Betrag aller Kunden im Verzug über CHF 500.00 liegt. Er setzt dafür ein Signifikanzniveau (Fehler des Typs I bzw. ' α ') von 5% fest. Rein zufällig wird eine Stichprobe von 172 unbezahlten Sammelrechnungen gezogen, welche ein arithmetisches Mittel von CHF 507.00 und eine Standardabweichung von CHF 38.00 aufweist.

Soll der Kreditmanager aufgrund dieser Stichprobe schliessen, dass der monatliche, durchschnittlich ausstehende bzw. unbezahlte (Kredit-)Betrag aller Kunden im Verzug grösser als CHF 500.00 ist, oder ist es vernünftig, dass er die Differenz aus CHF 507.00 und CHF 500.00 (= CHF 7.00) als rein zufällig 'deklariert'?

Wie weiter oben erwähnt, testet man mit der Null-Hypothese den Grundgesamtheitsparameter. In diesem Beispiel ist dies die Aussage, dass die Abweichung kleiner als CHF 500.00 ist. Falls die Null-Hypothese nicht abgelehnt werden könnte, ergäbe sich für den Kreditmanager keinen Handlungsbedarf; alles wäre sogenannten 'in Ordnung'. Wird hingegen die Null-Hypothese falsifiziert bzw. abgelehnt, wäre der Kreditmanager genötigt, sich Gedanken über die (neue) Situation zu machen.

Die Null-Hypothese (und somit auch die Alternativ-Hypothese) ist somit wie folgt zu formulieren:

$$\begin{aligned} H_0 &= \mu \leq \text{CHF } 500.00 \\ H_1 &= \mu > \text{CHF } 500.00 \end{aligned}$$

Da die Alternativ-Hypothese nur in eine Richtung, nämlich 'grösser als', formuliert ist, handelt es sich hier um einen einseitigen Test. Der kritische z-Wert ist somit 1.645. Die Test-Statistik ergibt daraus folgende Prüfgrösse:

$$z^* = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{507.00 - 500.00}{\frac{38.00}{\sqrt{172}}} = \frac{7.00}{2.8975} = 2.416$$

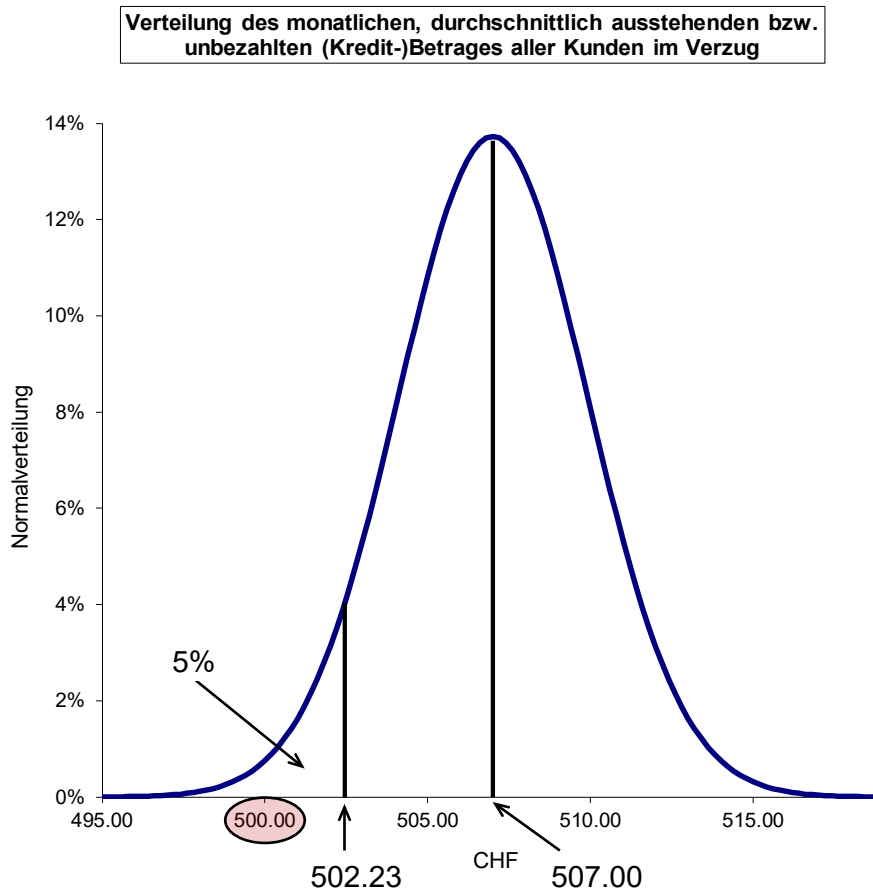
Da die Test-Statistik ausserhalb des kritischen Wertes liegt, also im Ablehnungsbereich, wird die Null-Hypothese abgelehnt und deshalb die Alternativ-Hypothese angenommen. Der Kreditmanager kann also sagen, dass der monatliche, durchschnittlich ausstehende bzw. unbezahlte (Kredit-)Betrag aller Kunden im Verzug grösser als CHF 500.00 ist.

Der Hypothesentest kann aber auch anhand des Konfidenz- bzw. Vertrauensintervalls dargestellt werden:

Der 'Eckpunkt' des einseitigen 95%igen Vertrauensintervalls beträgt (auf zwei Stellen nach dem Komma) CHF 503.23. Dieser berechnet sich wie folgt:

$$\mu = \bar{x} - 1.645 \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} = 507.00 - 1.645 \cdot \frac{38.00}{\sqrt{172}} = 507.00 - 4.77 = 502.23$$

²⁰⁴ siehe auch MASON, LIND, MARCHAL, 1967, ¹⁰2000, S. 317f.

Abb. 74: Normalverteilung der durchschnittlich unbezahlten (Kredit-)Beträge

Das ' μ ' von CHF 500.00 liegt ausserhalb des Konfidenz- bzw. Vertrauensintervalls. Dies bedeutet, dass die Null-Hypothese abgelehnt werden muss.

9.6 Bedeutung des p-Werts

Bis jetzt wurde mit dem Hypothesentest 'nur' die Null-Hypothese verworfen oder angenommen. Es wurde aber keine **Aussage gemacht, wie gross bzw. klein die Wahrscheinlichkeit ist, dass die Null-Hypothese in jedem Fall angenommen würde. Diese Wahrscheinlichkeit wird als 'p-Wert'**²⁰⁵ bezeichnet. Er gibt an, wo das Signifikanzniveau festgelegt werden müsste, dass der Entscheid 'umkippen' würde und ist deshalb auch das 'Gütemerkmal' des ganzen Tests.

Bei der Berechnung dieses p-Wertes setzt man die Test-Statistik bzw. Prüfgrösse als kritischen Wert ein, und liest aus der entsprechenden Tabelle die 'Restwahrscheinlichkeit' heraus, d.h. die Wahrscheinlichkeit, bei welcher dieser neue kritische Wert gerade erreicht und überschritten (bzw. bei negativen Werten unterschritten) wird.

Im Kreditmanager-Beispiel des letzten Kapitels ist dieser p-Wert ca. 0.8%. Dies bedeutet, dass nur mit einer Wahrscheinlichkeit von 0.8% der monatliche, durchschnittlich ausstehende bzw. unbezahlte (Kredit-)Betrag aller Kunden im Verzug kleiner als CHF 500 ist. Das Ablehnen der Null-Hypothese ist somit sehr wohl begründet.

²⁰⁵ p-value

9.7 Repetitionsfragen

9.7.1 Ausschuss-Anteil gut und schlecht eingestellter Maschine

Die Proportion defekter Stücke, die eine Maschine herstellt, ist 2%, wenn die Maschine gut eingestellt ist, und 5%, wenn sie schlecht eingestellt ist.

Man hat eine Tagesproduktion vorliegen und zieht daraus eine zufällige Stichprobe von 500 Stück, von denen 20 fehlerhaft sind.

Ermitteln Sie aufgrund der Stichprobe und unter Berücksichtigung eines Signifikanzniveaus von 10%, ob die Maschine eher gut oder eher schlecht eingestellt ist.

9.7.2 'Test' über besseres Management²⁰⁶

SMALL-X ist ein Produzent in einer Branche, die sich einem gesättigten Markt gegenübersteht. Während des letzten Konjunkturzyklus' von 6 Jahren war der durchschnittliche EBIT (Earnings Before Interests and Taxes bzw. Unternehmensergebnis vor Fremdkapitalzinsen und Gewinnsteuern) CHF 25 Mio. pro Jahr (mit einer Standardabweichung von CHF 8 Mio.). Dieser durchschnittliche EBIT des letzten Konjunkturzyklus' war markant besser als der langfristige EBIT-Durchschnitt von CHF 19 Mio. aller vorangehenden Konjunkturzyklen.

Das Management behauptet, dass der Erfolg von SMALL-X im letzten Konjunkturzyklus auf den Einsatz neuer operativer und strategischer Management-Ansätze zurückzuführen sei und deshalb die zukünftigen EBIT-Erwartungen nicht mehr aufgrund des langfristigen Durchschnitts von CHF 19 Mio. aus den früheren Konjunkturzyklen basieren dürfe.

- Kann die Aussage des Managements statistisch untermauert werden (unterstellen Sie ein Signifikanzniveau von 5%)?
- Bei welchem Signifikanzniveau kann die Aussage des Managements weder bejaht, noch verneint werden?

²⁰⁶ siehe auch DEFUSCO, McLEAVEY, PINTO, RUNKLE, 2001, S. 351.

9.7.3 Industrie-Teppich²⁰⁷

Ein Industrie-Teppich-Unternehmen will einen langlebigeren Teppich-Typ auf den Markt bringen. Die F&E-Abteilung hat deshalb den Auftrag erhalten, einen neuen Typ zu entwickeln. Die bisher produzierten Teppich-Typen weisen einen durchschnittlichen Haltbarkeits-Index von 500 Punkten [μ] mit einer Standardabweichung von 150 Haltbarkeits-Index-Punkten [σ] auf. Der von der F&E-Abteilung neu entwickelte Teppich-Typ hat - gemäss den Angaben der F&E-Abteilung - einen durchschnittlichen Haltbarkeits-Index von genau 600 Punkten. Die Standardabweichung des neu entwickelten Teppich-Typs hat sich gegenüber den bisher produzierten Teppich-Typen nicht verändert.

Es kann angenommen werden, dass die Verteilung der Haltbarkeits-Indizes der bisherigen Teppich-Typen und des neu entwickelten Teppich-Typs mit den oben angegebenen Parametern normalverteilt sei.

Die Unternehmensleitung des Industrie-Teppich-Unternehmens will den neu entwickelten Teppich-Typ erst produzieren, wenn mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% (einseitiger Test) gesagt werden kann, dass der neu entwickelte Teppich-Typ einen grösseren durchschnittlichen Haltbarkeits-Index aufweist als die bisher produzierten Industrie-Teppiche.

- Wie viele durchschnittliche Haltbarkeits-Index-Punkte müsste eine Probeproduktion bzw. Stichprobe im Umfange von $n = 36$ mindestens aufweisen, damit der neu entwickelte Teppich-Typ produziert würde?
- Wie gross wäre bei diesem minimalen, durchschnittlichen Haltbarkeits-Index der Stichprobe die Wahrscheinlichkeit für die Konsumenten, dass sie durch den Entscheid des Industrie-Teppich-Unternehmens nicht in den Genuss eines langlebigeren Teppich-Typs kommen, d.h. dass die durchschnittliche Haltbarkeit des Teppichs nicht den von der F&E-Abteilung angegebenen Parametern des neu entwickelten Teppich-Typs entspricht?

²⁰⁷ siehe auch BOHLEY, ⁶1996, S. 569 ff

10 REGRESSION UND KORRELATION²⁰⁸

In den beiden letzten Kapiteln über Stichprobentheorie und Stichprobenverteilung sowie Hypothesentests ging es darum, Grundgesamtheitsparameter zu testen. Dabei ging es immer um eine Überprüfung einer einzigen Variablen. In diesem Kapitel verlagert sich der Fokus: In den folgenden Ausführungen wird der **Zusammenhang zwischen zwei und mehr Variablen untersucht. Dabei bedient man sich einer mathematischen Gleichung, die es erlaubt, eine Variable aufgrund von anderen zu schätzen.**

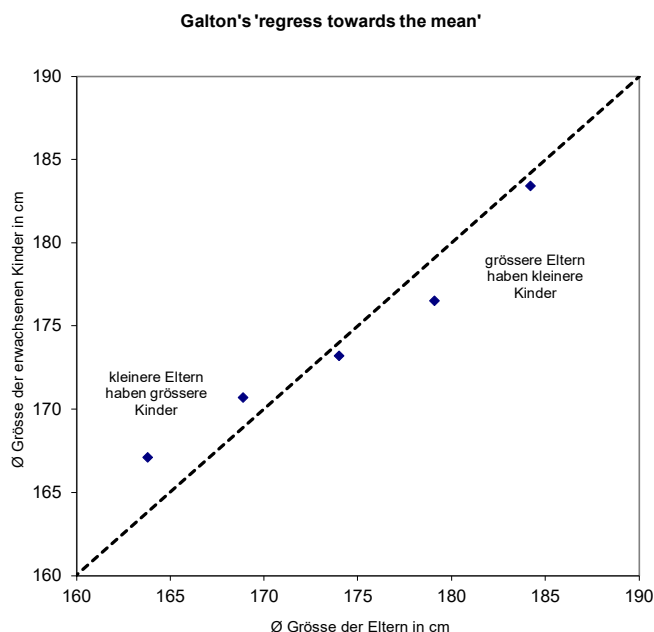
Es geht also darum, **statistisch** einen **Zusammenhang zwischen Ursache (X) und Wirkung (Y)** aufzuzeigen.

²⁰⁹Um 1885 untersuchte *Francis Galton* die Körpergrösse aufeinanderfolgenden Generationen von Menschen. Er konnte folgende zwei Feststellungen machen:

- Im Durchschnitt war die Körpergrösse von erwachsenen Kindern grosser Eltern grösser als die Körpergrösse von erwachsenen Kindern kleiner Eltern: der Zusammenhang der Durchschnitte verhielten sich (mehr oder weniger) linear.
- Im Durchschnitt war die Körpergrösse von erwachsenen Kindern grosser Eltern kleiner als ihre Eltern, während die Körpergrösse von erwachsenen Kindern kleiner Eltern grösser war als ihre Eltern: die Körpergrössen entwickeln sich zum Mittel hin zurück²¹⁰.

Galton zog eine Gerade durch seine Daten, welche die oben erwähnten Zusammenhänge aufzeichneten²¹¹, und bezeichnete diese als 'regression line' bzw. Regressionsgerade.

Abb. 75: Galton's regress 'towards the mean'



Ø Grösse der Eltern in cm	184.2	179.1	174.0	168.9	163.8
Ø Grösse der Kinder in cm	183.4	176.5	173.2	170.7	167.1

²⁰⁸ regression and correlation

²⁰⁹ nach UPTON, COOK, 1996, ²1997, S. 528f.

²¹⁰ regress towards the mean

²¹¹ siehe UPTON, COOK, 1996, ²1997, S. 528.

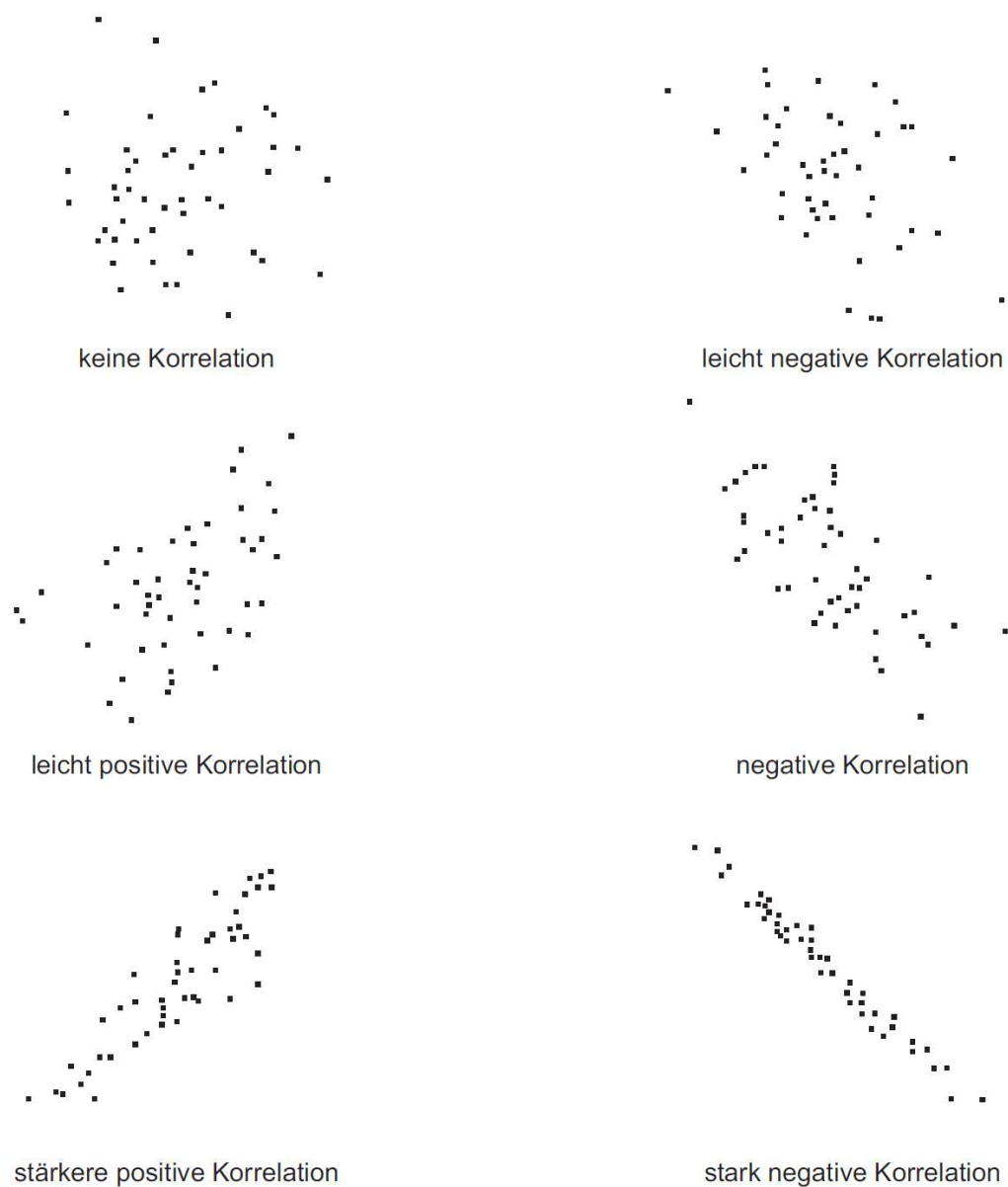
10.1 Korrelations-Analyse

Mit der **Korrelations-Analyse**²¹² bezeichnet man **Methoden und Techniken, welche die 'Güte' der Beziehung bzw. Zusammenhang von zwei Variablen misst.**

Damit überhaupt ersichtlich ist, ob ein Zusammenhang besteht und wie gross dieser ist, bedient man sich **Streudiagrammen**²¹³. Dabei ist es üblich, dass auf der **Abszisse (Horizontalen)** - auch mit **'X'** bezeichnet - die unabhängige Variable aufgezeichnet wird und auf der **Ordinate (Vertikalen)** - auch mit **'Y'** bezeichnet die abhängige Variable.

Folgende Streudiagramme²¹⁴ zeigen beispielhaft verschiedene Korrelationen bzw. Zusammenhänge auf:

Abb. 76: Streudiagramme beispielhaft verschiedene Korrelationen



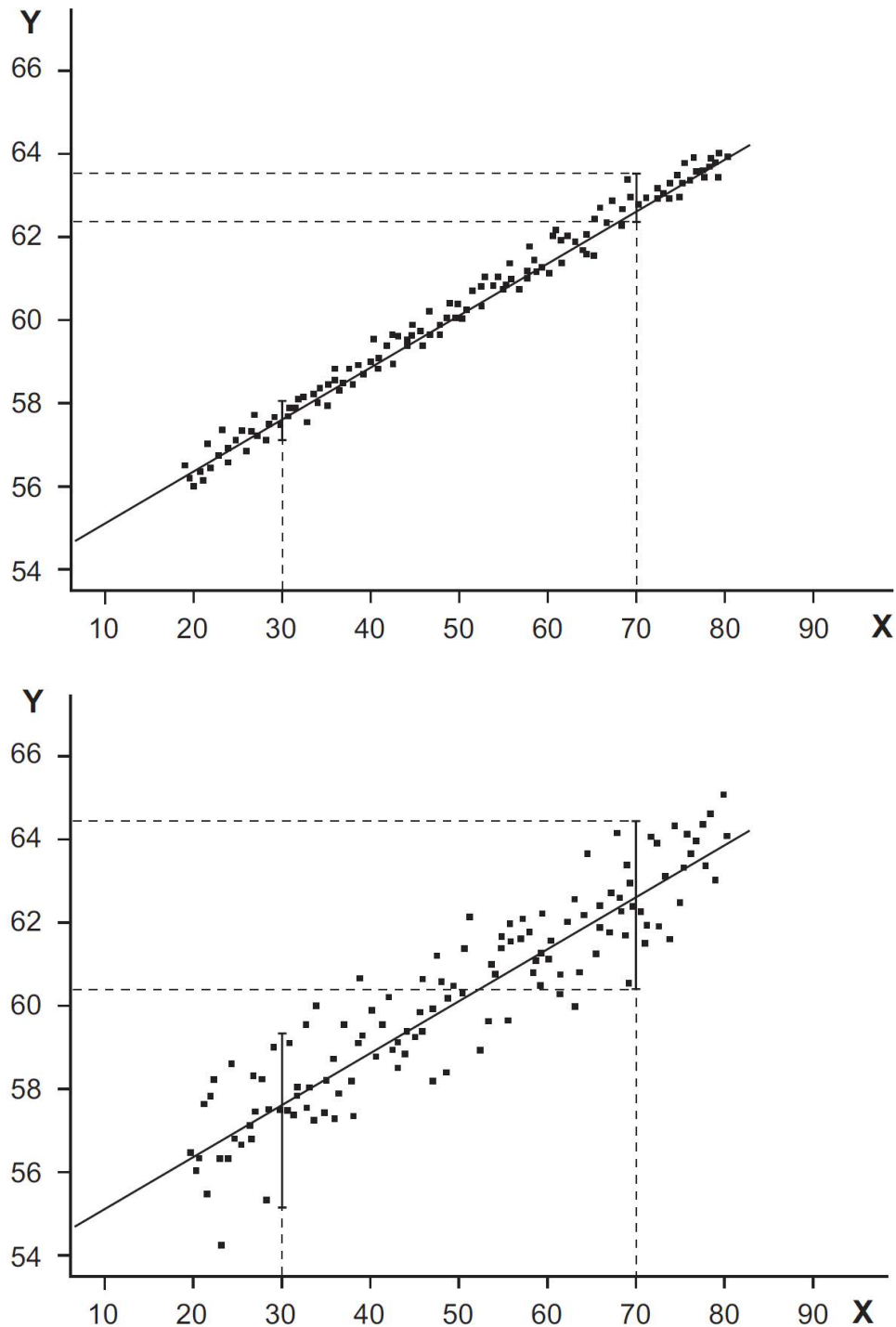
²¹² correlation analysis

²¹³ scatterplots

²¹⁴ siehe auch MOORE, McCABE, 1989, ³1999, S. 130.

Die beiden folgenden Streudiagramme²¹⁵ sollen anhand einer guten und einer weniger guten Korrelation den oben erwähnten Zusammenhang noch weiter verdeutlichen:

Abb. 77: Streudiagramme gute und weniger gute Korrelation



Aus den beiden obenstehenden Darstellungen ist klar ersichtlich, dass die gute Korrelation darin besteht, dass die durchschnittlichen vertikalen Abstände klein sind und bei der weniger guten Korrelation grösser.

²¹⁵ siehe auch MOORE, McCABE, 1989, ³1999, S. 146.

10.2 Linearitätsannahme der Regressionsfunktion

Es ist in der Statistik **üblich**, dass **die mathematische Gleichung eines Zusammenhangs von zwei Variablen in Form eines linearen Zusammenhangs aufgezeigt wird**. Wenn dies auch prima vista nicht für alle Fälle zutreffend ist, kann doch gesagt werden, dass ein linearer Zusammenhang wenigstens **im relevanten Bereich**²¹⁶ **bzw. Betrachtungsintervall sinnvoll** angewendet werden kann. Auch in der Kostenrechnung stellt sich die gleiche Problematik, nämlich dann wenn man das Kostenverhalten in einen fixen und variablen Teil bezüglich eines Kostentreibers²¹⁷ aufspaltet. Auch hier sind die Aussagen bezüglich dem fixen und variablen Teil nur im relevanten Bereich betriebswirtschaftlich sinnvoll.²¹⁸ Dies bedeutet aber auch, dass es meist nicht sehr sinnvoll ist, die Regressionsgerade ausserhalb dieses relevanten Bereiches zu verwenden, da dort meistens kein linearer Zusammenhang mehr besteht!

Ein **linearer Zusammenhang - auch Regressionsgerade bezeichnet** - wird mathematisch wie folgt definiert:

$$Y' = a_0 + b \cdot X$$

Y' steht für den geschätzten Wert der abhängigen Y-Variable
bezüglich eines gewählten X-Wertes

a_0 ist der Achsenabschnitt (intercept) der linearen Gleichung
bei einem X-Wert von Null

b ist die Steigung (slope) der linearen Gleichung,
d.h. wieviel sich durchschnittlich der geschätzte Wert von Y'
durch eine Veränderung einer Einheit von X verändert

X ist jeder gewählte Wert der unabhängigen Variablen ' X '

Selbstverständlich ist es möglich, auch nicht-lineare Regressions-Gleichungen zu verwenden. Dies hängt allein vom inhaltlichen Sachverhalt ab. Empfehlenswert ist dabei, dass die gewählte nicht-lineare Gleichung 'linearisiert' wird, d.h. dass durch Transformation eine lineare Gleichung entsteht. Dadurch wird es möglich, die weiter untenstehenden Aussagen bezüglich der linearen Regression auch für diese 'Funktionstypen' zu verwenden. In der Folge seien beispielhaft ein paar solche Gleichungen aufgezeigt²¹⁹:

Funktionstyp	'linearisierte' Form *)
geometrische Funktion: $Y = a_0 \cdot X^b$	$\log Y = \log a_0 + b \cdot \log X$
Exponentialfunktion: $Y = a_0 \cdot b^X$	$\log Y = \log a_0 + (\log b) \cdot X$
Exponentialfunktion: $Y = a_0 \cdot e^{bX}$	$\ln Y = \ln a_0 + b \cdot X$

*) 'log' entspricht dem dekadischen Logarithmus mit der Basis 10; 'ln' entspricht dem natürlichen Logarithmus mit der Basis 'e'

²¹⁶ relevant range

²¹⁷ cost driver

²¹⁸ siehe auch HORNGREN, FOSTER, DATAR, 1962, ⁹1997, S. 29f.

²¹⁹ in Anlehnung an BOHLEY, ⁶1996, S. 219.

10.3 Kennzahlen der Korrelation

Aufgrund der oben erwähnten Charakteristik der Korrelation **bediente man sich der Kennzahlen der Streuung bzw. der Standardabweichung und Varianz** (siehe Kapitel 5.2.4 und 5.2.5), um eine Kennzahl bezüglich der Korrelation zu 'kreieren'. Dabei begnügte man sich aber nicht mit einer Kennzahl in absoluten Werten, da diese nicht gut verglichen werden kann, sondern 'erfand' eine **relative Kennzahl** mit folgenden Eigenschaften:

- Sie kann die **Werte zwischen minus Eins und plus Eins** annehmen,
- Eine **perfekte negative Korrelation weist den Wert '-1' auf**, eine **perfekte positive Korrelation den Wert '+1'**,
- **Keine Korrelation wird durch den Wert '0' wiedergegeben**, d.h. alle Werte in der Nähe von Null kennzeichnen eine schwache Korrelation.

10.3.1 Korrelationskoeffizient

Der von den Statistikern *August Bravais* und *Karl Pearson* um ca. 1900 kreierte **Korrelationskoeffizient**²²⁰ weist alle oben aufgeführten Eigenschaften auf und ist auch heute noch **eine der bekanntesten Kennzahlen über die 'Güte' einer Korrelation**.

Der **Korrelationskoeffizient** berechnet sich wie folgt:

$$r = \frac{\sum[(X - \bar{X}) \cdot (Y - \bar{Y})]}{\sqrt{\sum(X - \bar{X})^2 \cdot \sum(Y - \bar{Y})^2}} = \frac{\text{cov}_{X,Y}}{s_X \cdot s_Y}$$

r steht für den Korrelationskoeffizient

X ist der jeweilige X-Wert eines beobachteten Wertepaares

$\bar{X}$ ist das arithmetische Mittel aller X-Werte

Y ist der jeweilige Y-Wert eines beobachteten Wertepaares

$\bar{Y}$ ist das arithmetische Mittel aller Y-Werte

$$s_X \quad \text{Standardabweichung der X-Werte bzw. } s_X = \sqrt{\frac{\sum(X - \bar{X})^2}{n - 1}}$$

$$s_Y \quad \text{Standardabweichung der Y-Werte bzw. } s_Y = \sqrt{\frac{\sum(Y - \bar{Y})^2}{n - 1}}$$

$$\text{cov}_{X,Y} \quad \text{Kovarianz bzw. } \text{cov}_{X,Y} = \frac{\sum[(X - \bar{X}) \cdot (Y - \bar{Y})]}{n - 1}$$

Der Ausdruck des Zählers ist der Kovarianz²²¹ sehr ähnlich. Letztere berechnet sich wie oben aufgeführt und gibt Auskunft darüber, ob sich tendenziell mit der Änderung von 'X' auch 'Y' ändert, bzw. ob im Durchschnitt zu grösseren (kleineren) X-Werten grössere (kleinere) Y-Werte gehören. Die Kovarianz wird vor allem in den Bereichen des 'Corporate Finance' und im 'Portfolio Management' verwendet.²²²

²²⁰ coefficient of correlation

²²¹ covariance

²²² siehe auch DEFUSCO, McLEAVEY, PINTO, RUNKLE, 2001, S. 366ff und S. 197ff.

10.3.2 Hypothesentest bezüglich Korrelationskoeffizient

Auch wenn der berechnete Korrelationskoeffizient eine hohe Korrelation zwischen zwei Variablen ausweist, stellt sich bei einer **kleinen Anzahl von Beobachtungen** sehr schnell die Frage, ob die hohe Korrelation wirklich vorhanden oder ob sie lediglich zufälligerweise entstanden ist.

Zur Beantwortung dieser Frage bedient man sich eines speziellen Hypothesentests (siehe auch Kapitel 9), der wie folgt aussieht:

Die **Null-Hypothese** und die **Alternativ-Hypothese** bezüglich Korrelationskoeffizient werden dabei wie folgt formuliert:

$H_0: \rho = 0$ (Die Korrelation $[\rho]$ in der Grundgesamtheit ist gleich Null)

$H_1: \rho \neq 0$ (Die Korrelation $[\rho]$ in der Grundgesamtheit ist von Null verschieden)

Aufgrund der Formulierung der Alternativ-Hypothese kann geschlossen werden, dass es sich um einen zweiseitigen Test handelt.

Die **Test-Statistik bzw. Prüfgrösse** bezüglich des Korrelationskoeffizienten lautet wie folgt:

$$t_{(n-2)}^* = \frac{r \cdot \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$$

r steht für den Korrelationskoeffizient

n ist die Anzahl der Beobachtungen

$(n-2)$ ist die Anzahl der Freiheitsgrade

Falls die Test-Statistik innerhalb des kritischen $t_{(n-2)}$ -Wertes liegt, kann die Null-Hypothese nicht abgelehnt werden, liegt sie ausserhalb, wird die Null-Hypothese abgelehnt und die Alternativ-Hypothese angenommen. Bei letzterem Fall wäre statistisch 'bewiesen', dass die Korrelation auch unter Berücksichtigung eines Signifikanzniveaus von z.B. 5% von Null verschieden ist.

10.3.3 Determinationskoeffizient

Der oben erwähnte Korrelationskoeffizient zeigt aber noch nicht auf, wie gross der Anteil der Streuung von Y durch die Regressionsgeraden 'bestimmt' oder 'erklärt' wird. Diese Eigenschaft zeigt erst das Quadrat des Korrelationskoeffizienten auf, nämlich der sogenannte Determinationskoeffizient²²³.

Der **Determinationskoeffizient - auch Bestimmtheitsmass genannt** - berechnet sich somit wie folgt:

$$r^2 = \left[\frac{\sum[(X - \bar{X}) \cdot (Y - \bar{Y})]}{\sqrt{\sum(X - \bar{X})^2 \cdot \sum(Y - \bar{Y})^2}} \right]^2$$

r^2 steht für den Determinationskoeffizient und entspricht dem Quadrat des Korrelationskoeffizienten

X ist der jeweilige X -Wert eines beobachteten Wertepaares

$\bar{X}$ ist das arithmetische Mittel aller X -Werte

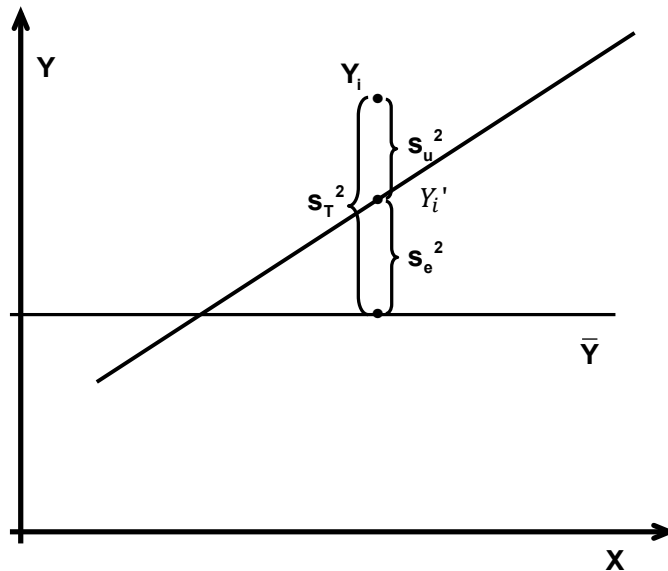
Y ist der jeweilige Y -Wert eines beobachteten Wertepaares

$\bar{Y}$ ist das arithmetische Mittel aller Y -Werte

²²³ coefficient of determination

Die folgende Darstellung soll verdeutlichen, was der Determinationskoeffizient aussagt:

Abb. 78: Verdeutlichung Determinationskoeffizient



$$r^2 = \frac{s_e^2}{s_T^2} = \frac{\text{erklärte Varianz}_{\text{von } Y}}{\text{Varianz Total}_{\text{von } Y}} = \frac{\frac{1}{n-1} \cdot \sum (Y' - \bar{Y})^2}{\frac{1}{n-1} \cdot \sum (Y - \bar{Y})^2} \Rightarrow \frac{SSR}{SST} = 1 - \frac{SSE}{SST}$$

$$\text{wobei } s_T^2 = s_e^2 + s_u^2$$

SSR (Sum of Squared Regressions)

ist die Quadratsumme der Regressionsabweichungen bzw. $\sum (Y' - \bar{Y})^2$

SSE (Sum of Squared Errors or residuals)

ist die Quadratsumme der Residuenabweichungen

(auch als ε bezeichnet) bzw. $\sum (Y - Y')^2$

SST (Sum of Squared Totals) ist die Quadratsumme der

Total-Abweichungen bzw. $\sum (Y - \bar{Y})^2$

Anhand des Determinationskoeffizienten kann ausgesagt werden, wieviel Prozent der Streuung durch die Regression(sgeraden) 'erklärt' ist und - anhand der Ergänzung auf 1 bzw. 100% - wieviel nicht 'erklärt' ist.

Aus den obigen Ausführungen wird klar, dass der Korrelationskoeffizient 'r' eine sehr gute Masszahl für die 'Güte' der Beziehung zwischen zwei Variablen darstellt. Wenn es aber darum geht, über den Umfang der Korrelation etwas auszusagen, ist es korrekter den Determinationskoeffizienten - der immer einen geringeren absoluten Wert (ausser bei +1 und -1) aufweist - zu verwenden.

10.4 Praktisches Beispiel

Im folgenden Beispiel²²⁴ wird die Berechnung des Korrelations- und Determinationskoeffizienten aufgezeigt. In einem Unternehmen möchte man den Zusammenhang zwischen der Anzahl Mitarbeiter, die einen speziellen Artikel zusammensetzen, und der Anzahl produzierten Einheiten dieses speziellen Artikels herausfinden. In einem Experiment wurden zuerst zwei Mitarbeiter zu einem Team vereint und ihnen aufgetragen, möglichst viele dieser speziellen Artikel zusammen herzustellen. Während einer Stunde produzierten sie 9 Einheiten. Um den Zusammenhang 'statistisch' zu begründen, wurden weitere Teams mit unterschiedlicher Anzahl Team-Mitglieder und dem gleichen Auftrag zusammengestellt.

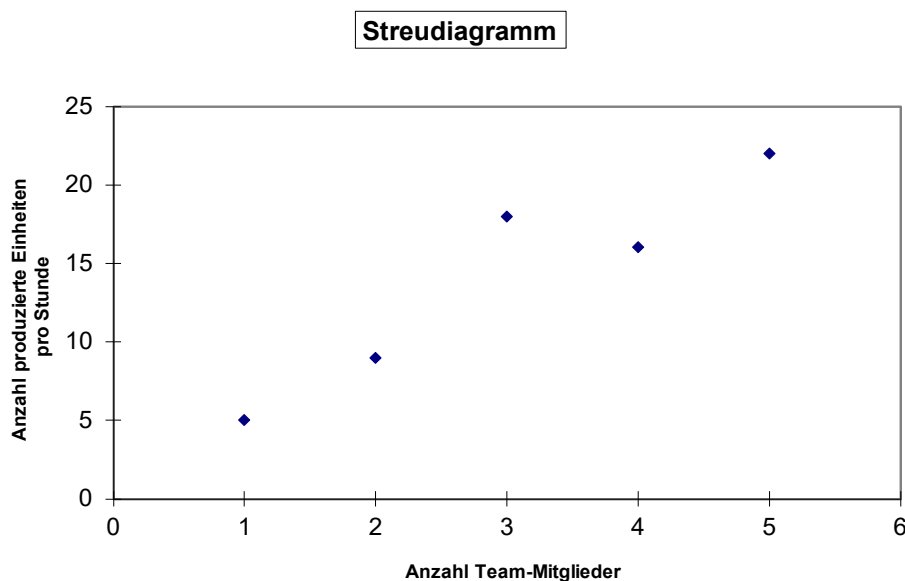
Die folgende Tabelle zeigt das Resultat der durchgeführten Experimente:

Abb. 79: Tabelle Zusammenhang Anzahl Team-Mitglieder und Anzahl produzierte Einheiten

Anzahl Team-Mitglieder (unabhängige Variable 'X')	Anzahl produzierte Einheiten pro Stunde (abhängige Variable 'Y')
2	9
4	16
1	5
5	22
3	18

Zuerst wird ein Streudiagramm gezeichnet und anhand des Diagramms begründet, ob es so aussieht, wie wenn ein Zusammenhang zwischen der Anzahl Team-Mitglieder und der Anzahl produzierten Einheiten pro Stunde besteht oder nicht. Anschliessend wird der Korrelationskoeffizient berechnet und anhand des Determinationskoeffizienten eine Aussage über die 'Stärke' des Zusammenhangs gemacht. Zudem wird ein Test bezüglich des Korrelationskoeffizienten mit einem Signifikanzniveau von 5% durchgeführt.

Abb. 80: Streudiagramm Anzahl Team-Mitglieder und Anzahl produzierte Einheiten



²²⁴ siehe auch MASON, LIND, MARCHAL, 1967, ¹⁰2000, S. 432.

Das oben aufgeführte Streudiagramm zeigt einen grundsätzlich positiven Zusammenhang zwischen der Anzahl Team-Mitglieder und der Anzahl produzierten Einheiten pro Stunde.

Abb. 81: Tabelle Berechnungen 'r' 'r²' und Prüfgrösse von 'r'

X	Y	$(X - \bar{X})$	$(Y - \bar{Y})$	$[(X - \bar{X}) \cdot (Y - \bar{Y})]$	$(X - \bar{X})^2$	$(Y - \bar{Y})^2$
2	9	-1	-5	5	1	25
4	16	1	2	2	1	4
1	5	-2	-9	18	4	81
5	22	2	8	16	4	64
3	18	0	4	0	0	16
$\bar{X} = 3$	$\bar{Y} = 14$			$\Sigma = 41$	$\Sigma = 10$	$\Sigma = 190$

$$r = \frac{\sum [(X - \bar{X}) \cdot (Y - \bar{Y})]}{\sqrt{\sum (X - \bar{X})^2 \cdot \sum (Y - \bar{Y})^2}} = \frac{41}{\sqrt{10 \cdot 190}} = 0.9406$$

$r^2 = 0.9406^2 = 0.8847$ bzw. rund 88.5% der Streuung wird durch die Regression erklärt

$$t_{(n-2)}^* = \frac{r \cdot \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} = \frac{0.9406 \cdot \sqrt{5-2}}{\sqrt{1-0.8847}} = 4.798$$

Der kritische $t_{(n-2)}$ -Wert beträgt laut T-Verteilungstabelle bei einem Signifikanzniveau von 5%: 3.182

Die Test-Statistik bzw. Prüfgrösse liegt ausserhalb des kritischen $t_{(n-2)}$ -Wertes, wodurch die Null-Hypothese abgelehnt und die Alternativ-Hypothese angenommen wird. Deshalb kann gesagt werden, dass die Korrelation auch unter Berücksichtigung eines Signifikanzniveaus von 5% von Null verschieden ist.

10.5 Ursache-Wirkungs-Zusammenhang - kritische Hinterfragung²²⁵

Wenn eine hohe Korrelation von zwei Variablen festgestellt wird, ist man leicht geneigt auszusagen, dass eine Erhöhung oder eine Verringerung der Variablen 'X' eine entsprechende Veränderung der Variablen 'Y' 'verursacht'. Z.B. kann gezeigt werden, dass der Konsum an Erdnüssen in Georgia (USA) eine hohe Korrelation mit dem Konsum an Aspirin aufweist. Dies bedeutet aber noch nicht, dass eine Erhöhung des Konsums an Erdnüssen in Georgia (USA) durch eine Erhöhung des Konsums an Aspirin 'verursacht' wird. Eine solche 'Beziehung' wird auch **unechte Korrelation**²²⁶ genannt. Weitere Beispiele für unechte Korrelationen sind z.B. das Einkommen von Professoren an USA-Universitäten und die Anzahl Patienten in USA-Heilanstalten sowie die negative Korrelation der Affenbestände in den USA und die Anzahl der verliehenen Doktordiplome in den USA.

Die einzige Aussage, die gemacht werden kann, wenn zwei Variable eine starke Korrelation aufweisen, ist, dass eine starke 'Beziehung' zwischen den beiden Variablen besteht, nicht aber dass sie auch ein **Ursache-Wirkungs-Zusammenhang aufweisen. Letzterer ist allein durch eine ökonomisch logische Interpretation möglich, nicht aber durch statistische Kennzahlen.**

²²⁵ in Anlehnung an MASON, LIND, MARCHAL, 1967, ¹⁰2000, S. 431.

²²⁶ spurious correlation

10.6 Regressions-Analyse

Um den Zusammenhang bzw. die Beziehung zwischen der unabhängigen Variablen 'X' und der abhängigen Variablen 'Y' zu beschreiben, bedient man sich der Technik der **Regressions-Analyse**²²⁷, bei welcher mathematisch eine **lineare Gleichung** herangezogen wird (siehe Kapitel 10.2). **Aufgrund dieser linearen Gleichung ist es auch möglich, 'Prognosen' für die abhängige Variable 'Y*' aufgrund eines gewählten X-Wertes (X*) zu machen.**

10.6.1 Methode der kleinsten Quadrate

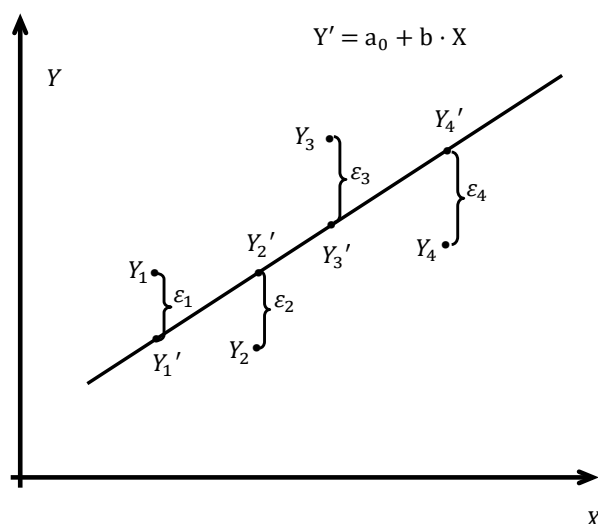
Im Gegensatz zu einer Freihandzeichnung einer Geraden durch die beobachteten Werte weist die Methode der kleinsten Quadrate²²⁸ eine klare Berechnungsgrundlage auf. **Bei der Methode der kleinsten Quadrate werden die vertikalen Abstandsquadrate zwischen den beobachteten Werten und den diesbezüglichen Werten auf der Regressionsgeraden bzw. die Residuenabweichungen ' ε ' minimiert.**

Neben der Freihandzeichnung gibt es auch noch andere Methoden zur Bestimmung einer linearen Gleichung, die aber allesamt nicht sonderlich mathematisch fundiert sind. Zwei der bekanntesten Methoden werden kurz erläutert:

- Schichtkostenverfahren bzw. Minimax- oder Extremwert-Methode²²⁹: Bei dieser Methode wird die Steigung aufgrund des minimalen und maximalen X-Wertes (bzw. des diesbezüglichen Y-Wertes) ermittelt. Anschliessend wird der Achsenabschnitt von einem dieser beiden Punkte 'rückwärts' gerechnet.
- Mittelwertmethode: Bei dieser Methode werden die aufsteigend sortierten X-Werte (bzw. die diesbezüglichen Y-Werte) in eine obere und untere Hälfte aufgeteilt. Für beide Hälften wird sowohl das arithmetische Mittel der jeweiligen X-Werte und Y-Werte ermittelt. Anschliessend werden die beiden arithmetischen Mittel (jeweils ein X- und Y-Wert) miteinander verbunden. Daraus kann sowohl die Steigung als auch der Achsenabschnitt ermittelt werden.

Die folgende Darstellung soll die Methode der kleinsten Quadrate illustrieren.

Abb. 82: Illustration Methode der kleinsten Quadrate



Methode der kleinsten Quadrate:

$$= \sum \varepsilon_i^2 = \sum (Y_i - \hat{Y}_i)^2 \Rightarrow \text{minimieren!}$$

²²⁷ regression analysis

²²⁸ least squares method

²²⁹ high-low method

Der Nachteil dieser Methode besteht darin, dass sogenannte 'Ausreisser'²³⁰ durch die Quadrierung ein überproportionales 'Gewicht' bei der Berechnung erhalten. Aus diesem Grund ist es in den meisten Statistik-Software-Paketen möglich, dass gewisse 'grosse' Ausreisser aus der Berechnung ausgeschlossen werden können.

Wichtig zu erwähnen ist auch, dass **die Gerade nach der Methode der kleinsten Quadrate durch das arithmetische Mittel der X-Werte und das arithmetische Mittel der Y-Werte verläuft.**

Die Funktion der Geraden sieht wie folgt aus und die beiden Parameter, nämlich der Achsenabschnitt²³¹ 'a₀' und die Steigung²³² 'b', werden nach der Methode der kleinsten Quadrate wie folgt berechnet:

$$Y' = a_0 + b \cdot X$$

Y' steht für den geschätzten Wert der abhängigen Y-Variable
bezüglich eines gewählten X-Wertes

a₀ ist der Achsenabschnitt der linearen Gleichung bei einem X-Wert von Null

b ist die Steigung der linearen Gleichung - Regressionskoeffizient
(regression coefficient) genannt,

d.h. wieviel sich durchschnittlich der geschätzte Wert von Y'
durch eine Veränderung einer Einheit von X verändert

X ist jeder gewählte Wert der unabhängigen Variablen 'X'

$$b = \frac{\sum[(X - \bar{X}) \cdot (Y - \bar{Y})]}{\sum(X - \bar{X})^2} = \frac{\text{cov}_{X,Y}}{s_X^2}$$

$$a_0 = \bar{Y} - b \cdot \bar{X}$$

$\bar{X}$ steht für das arithmetische Mittel der X-Werte

$\bar{Y}$ steht für das arithmetische Mittel der Y-Werte

Die Regressionsgeraden nach der Methode der kleinsten Quadrate würde für das in Kapitel 10.4 aufgeführte 'praktische Beispiel' folgende Parameter aufweisen:

²³⁰ outliers

²³¹ intercept

²³² slope

Abb. 83: Tabelle Berechnung 'b', 'a₀' und geschätzte Y'-Werte

X	Y	(X - $\bar{X}$)	(Y - $\bar{Y}$)	$[(X - \bar{X}) \cdot (Y - \bar{Y})]$	$(X - \bar{X})^2$
2	9	-1	-5	5	1
4	16	1	2	2	1
1	5	-2	-9	18	4
5	22	2	8	16	4
3	18	0	4	0	0
$\bar{X} = 3$	$\bar{Y} = 14$			$\sum = 41$	$\sum = 10$

$$b = \frac{\sum[(X - \bar{X}) \cdot (Y - \bar{Y})]}{\sum(X - \bar{X})^2} = \frac{41}{10} = 4.1$$

$$a_0 = \bar{Y} - b \cdot \bar{X} = 14 - 4.1 \cdot 3 = 1.7$$

Die Regressionsgerade würde also wie folgt lauten:

$$Y' = a_0 + b \cdot X \Rightarrow Y' = 1.7 + 4.1 \cdot X$$

Für die X-Werte ergäbe dies aufgrund der Regressionsgeraden folgende, geschätzte Y'-Werte:

X	Y'
2	9.9
4	18.1
1	5.8
5	22.2
3	14

10.6.2 Standardfehler der Schätzung

Da die 'wahren' Y-Werte kaum je den 'geschätzten' Y'-Werten entsprechen, d.h. **da die beobachteten Y-Werte kaum je auf der Regressionsgeraden zu liegen kommen, ergibt sich ein 'Fehler der Schätzung'**. Anders ausgedrückt: es gäbe keinen 'Fehler der Schätzung' wenn die Regressionsgerade genau durch die beobachteten Y-Wert verlaufen würde.

Da normalerweise aber stets ein 'Fehler der Schätzung' vorhanden ist, benötigt man eine Kennzahl, die aussagt, wie gross (bzw. klein) dieser 'Fehler der Schätzung' ist. In Anlehnung an das Streuungsmass 'Standardabweichung' wird diese Kennzahl auch als **'Standardfehler der Schätzung'**²³³ bezeichnet und wie folgt berechnet:

$$SEE = \sqrt{\frac{\sum(Y - Y')^2}{n - 2}}$$

²³³ standard error of estimate bzw. SEE

Der Standardfehler der Schätzung gleicht sehr stark der Berechnung der Standardabweichung einer Stichprobe. Der Unterschied besteht darin, dass der **Standardfehler der Schätzung die (durchschnittliche) Streuung um die Regressionsgeraden misst**. Da die Regressionsgerade zwei Parameter, nämlich ' a_0 ' und ' b ' aufweist und diese grundsätzlich nicht bekannt sind, wird im Nenner durch ' $n - 2$ ' dividiert. Bei der multiplen Regressions-Analyse (siehe Kapitel 10.7) ist der Nenner nicht ' $n - 2$ ', sondern ' $n - k - 1$ ', wobei ' k ' der Anzahl Regressionskoeffizienten entspricht.

Anhand dieser Kennzahl ist es z.B. möglich, die 'Güte' bzw. die Anpassungsgenauigkeit von verschiedenen Regressionsgeraden miteinander zu vergleichen. Ein kleiner Standardfehler der Schätzung bedeutet, dass die aktuellen Werte Nahe bei der Regressionsgeraden liegen, ein grosser Standardfehler der Schätzung weist auf eine schlechte 'Anpassung' hin. Zudem benötigt man den Standardfehler der Schätzung auch für die Berechnung des Vertrauensintervalls der Parameter der Regressionsgeraden sowie das Prognose-Intervall (siehe Kapitel 10.6.5).

10.6.3 Weitere Annahmen der linearen Regressionsfunktion

Da hier keine mathematischen Herleitungen aufgeführt wurden, seien die bei der linearen Regression unterstellten Annahmen wenigstens verbal aufgeführt:

- Für jeden X-Wert gibt es eine Gruppe von Y-Werten, die **allesamt normalverteilt** sind,
- **Die arithmetischen Mittel dieser normalverteilten Y-Werte liegen auf der Regressionsgeraden**,
- Die **Standardabweichungen der normalverteilten Y-Werte sind alle gleich gross**,
- Die **Y-Werte sind unabhängig voneinander**, d.h. es gibt keine Abhängigkeit unter den Y-Werten.

10.6.4 Drei wichtige Tests bezüglich der unterstellten Annahmen

Aufgrund der Linearitäts-Annahme (siehe Kapitel 10.2) und den weiteren Annahmen (siehe Kapitel 10.6.3) sind im Wesentlichen drei 'Überprüfungen' bzw. Tests vorzunehmen, um sicherzustellen, dass die gewählte lineare Regressionsfunktion modell-theoretisch auch angewendet werden darf.

Linearität²³⁴

Anhand der Aufzeichnung der unabhängigen Variablen 'X' und der abhängigen Variablen 'Y' in einem Streudiagramm²³⁵ ist ersichtlich, ob der Zusammenhang bzw. die Beziehung linear ist oder 'exponentiell'. **Liegt ein 'exponentieller' Zusammenhang vor, sind die 'Y'-Werte zu logarithmieren (meist wird der natürliche Logarithmus angewendet). Dadurch erreicht man, dass sich der Zusammenhang bzw. die Beziehung - nun mit den logarithmierten 'Y' - Werten - linear verhält.** Erst dadurch wird sichergestellt, dass modell-theoretisch die hier aufgeführte Regressions-Analyse überhaupt durchgeführt werden kann.

Heteroskedastizität²³⁶

Bedingte Heteroskedastizität besteht dann, wenn die Residuenabweichungen bzw. $(Y - Y')$ entlang der unabhängigen Variablen 'X' systematisch grösser oder kleiner werden. Dies stellt deshalb ein Problem dar, da dadurch die weiter unten aufgeführten Parameter-Tests nicht mehr 'statistisch' schlüssig vorgenommen werden können. Falls diese bedingte Heteroskedastizität vorhanden ist, müssen 'Korrekturen'²³⁷ vorgenommen werden.

Am einfachsten wird dieser Test via ein Streudiagramm²³⁸ der 'X'-Werte und der Residuenabweichungen bzw. $(Y - Y')$ -Werte vorgenommen. Falls die Streuung der Residuenabweichungen entlang der X-Achse systematisch zu oder abnimmt, besteht bedingte Heteroskedastizität.

²³⁴ siehe auch Kapitel 10.2

²³⁵ scatterplot

²³⁶ heteroscedasticity

²³⁷ siehe dazu die Ausführungen z.B. bei DEFUSCO, McLEAVEY, PINTO, RUNKLE, 2001, S. 445ff.

²³⁸ scatterplot

Autokorrelation²³⁹

Autokorrelation besteht dann, wenn die Residuen untereinander korrelieren bzw. die beobachteten 'Y'-Werte einen Zusammenhang bzw. Abhängigkeit untereinander aufweisen. Dies zeigt sich darin, dass sich die beobachteten 'Y'-Werte über mehrere aufeinanderfolgende 'X'-Werte konsistent über oder unter der linearen Regressionsfunktion befinden. Beim Vorliegen einer Autokorrelation entsteht das Problem, dass die berechneten Test-Statistiken bzw. Prüfgrößen bezüglich des 'wahren' Achsenabschnitts ' α_0 ' bzw. der 'wahren' Steigung ' β ' (der Grundgesamtheit) (siehe Kapitel 10.6.6) entweder zu gross (positive Autokorrelation) oder zu klein (negative Autokorrelation) ausgewiesen werden. Dadurch ist es nicht mehr möglich, die 'Güte' der linearen Regression - ohne entsprechende 'Korrekturen'²⁴⁰ - zu überprüfen. Eine andere 'Lösung' des Problems kann auch darin bestehen, dass ein anderes Modell (z.B. das in Kapitel 11.2 erklärte ARIMA-Modell) verwendet wird.

Der bekannteste Test bezüglich Autokorrelation ist der sogenannte '**Durbin-Watson-Statistik**', die wie folgt definiert ist:

$$DW = \frac{\sum (\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})^2}{\sum \varepsilon_t^2}$$

ε_t Residuenabweichungen bzw. $(Y - Y')$

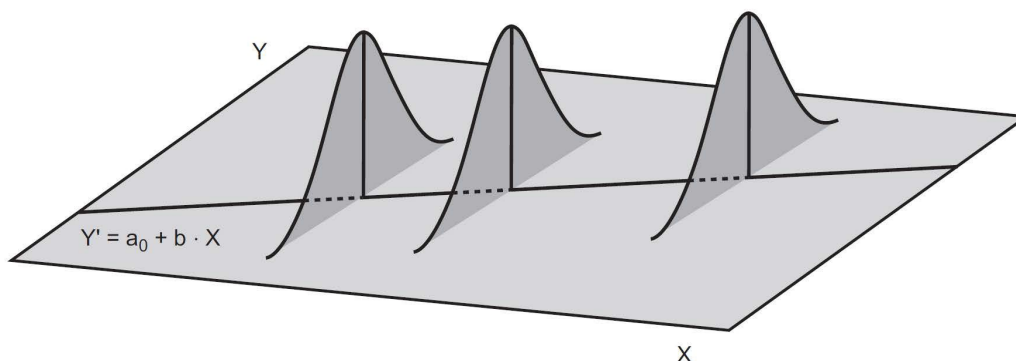
Folgende Faustregel kann bezüglich der Durbin-Watson-Statistik aufgestellt werden: Wenn die Testgrösse zwischen ca. 1.5 und 2.5 liegt, besteht **keine** wesentliche positive Autokorrelation (gar keine bei 2); liegt sie unter 1.5, dann liegt positive Autokorrelation vor, liegt sie über 2.5, dann liegt negative Autokorrelation vor. Zur Ermittlung der genauen 'Grenzwerte' gibt es entsprechende Tabellen, die für 'n' und 'k' die dazugehörigen Durbin-Watson - Werte angeben.

10.6.5 Vertrauensintervall der Parameter der Regressionsgeraden sowie Prognose-Intervall

Da praktisch jede Regressionsgerade einen Standardfehler der Schätzung aufweist (siehe Kapitel 10.6.2), sind folglich **die beiden (geschätzten) Parameter, nämlich a_0 und b , nicht 'genaue' Parameter**. Wie in den unterstellten Annahmen der linearen Regression bereits erwähnt wurde (siehe Kapitel 10.6.3), liegen die arithmetischen Mittel der normalverteilten Y-Werte auf der Regressionsgeraden. Aus diesem Grund kann auch gesagt werden, dass die **beiden (geschätzten) Parameter nur den arithmetischen Mitteln der effektiv normalverteilten Parameter der Grundgesamtheit, d.h. α_0 und β , entsprechen**.

Die folgende Darstellung soll die oben gemachten Aussagen visuell verdeutlichen:

Abb. 84: Illustration Regressionsgerade und Standardfehler der Schätzung



²³⁹ serial correlation

²⁴⁰ siehe dazu die Ausführungen z.B. bei DEFUSCO, McLEAVEY, PINTO, RUNKLE, 2001, S. 450ff.

Aufgrund dieser Überlegungen ist es nun auch klar, dass - unter Zuhilfenahme der in Kapitel 8.4 gemachten Ausführungen - für **die beiden Parameter der Grundgesamtheit, d.h. α_0 und β , ein Konfidenz- bzw. Vertrauensintervall zu berechnen ist.**

Das **Vertrauensintervall des 'wahren' Achsenabschnitts ' α_0 ' (der Grundgesamtheit)** berechnet sich wie folgt:

$$\alpha_0 = a_0 \pm t_{(n-2)} \cdot SEE \cdot \sqrt{\frac{\sum X^2}{n \cdot \sum (X - \bar{X})^2}}$$

α_0 steht für den 'wahren' Achsenabschnitt (der Grundgesamtheit)

$\bar{X}$ steht für das arithmetische Mittel der X-Werte

SEE steht den Standardfehler der Schätzung bzw. ist gleich $\sqrt{\frac{\sum (Y - Y')^2}{n - 2}}$

$t_{(n-2)}$ ist der kritische, dem verlangten Signifikanzniveau entsprechende t-Wert bei (n - 2) Freiheitsgraden

Das **Vertrauensintervall der 'wahren' Steigung ' β ' (der Grundgesamtheit)** berechnet sich wie folgt:

$$\beta = b \pm t_{(n-2)} \cdot \frac{SEE}{\sqrt{\sum (X - \bar{X})^2}}$$

β steht für die 'wahren' Steigung (der Grundgesamtheit)

$\bar{X}$ steht für das arithmetische Mittel der X-Werte

SEE steht den Standardfehler der Schätzung bzw. ist gleich $\sqrt{\frac{\sum (Y - Y')^2}{n - 2}}$

$t_{(n-2)}$ ist der kritische, dem verlangten Signifikanzniveau entsprechende t-Wert bei (n - 2) Freiheitsgraden

Aus den oben erwähnten Ausführungen ist auch ohne grössere Schwierigkeit ersichtlich, dass auch für die Prognose-Werte ein Vertrauensintervall angegeben werden kann.

Das **Vertrauensintervall für die 'wahre' Einzel-Prognose Y^* (bei gegebenem X^*)** berechnet sich wie folgt:

$$Y^* = Y'^* \pm t_{(n-2)} \cdot SEE \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(X^* - \bar{X})^2}{\sum (X - \bar{X})^2}}$$

Y^* steht für den 'wahren' Prognosewert (der Grundgesamtheit) bei gegebenem X^*

Y'^* ist der Prognosewert (bei gegebenem X^*) gemäss den Parametern a_0 und b

X^* ist der für die Prognose gegebene X-Wert

SEE steht den Standardfehler der Schätzung bzw. ist gleich $\sqrt{\frac{\sum (Y - Y')^2}{n - 2}}$

$t_{(n-2)}$ ist der kritische, dem verlangten Signifikanzniveau entsprechende t-Wert bei (n - 2) Freiheitsgraden

Soll lediglich das Vertrauensintervall für die 'wahre' durchschnittliche Prognose Y^* (bei gegebenem X^*) berechnet werden, kann die '1' unter dem grossen Wurzelausdruck weggelassen werden. Angenommen, das Kostenverhalten einer Kostenstelle sei anhand einer Regressionsgeraden mit der unabhängigen Variablen 'Maschinenstunden' bestimmt worden. Die Kostenstellenkosten (bzw. deren Prognose-Intervall) können nun einerseits für ein Einzelereignis (Einzelprognose) bei gegebenen Maschinenstunden X^* oder für den Durchschnitt der Ereignisse (durchschnittliche Prognose) bei gegebenen Maschinenstunden X^* bestimmt werden. Anders ausgedrückt, die Einzelprognose gibt ein Vertrauensintervall für einen konkreten Fall bei gegebenem X^* , die durchschnittliche Prognose das Vertrauensintervall für den Durchschnitt aller Fälle bei gegebenem X^* an. Logischerweise ist das Vertrauensintervall für die durchschnittliche Prognose kleiner als dasjenige für die Einzelprognose.²⁴¹

10.6.6 Hypothesentest bezüglich dem 'wahren' Achsenabschnitt bzw. der 'wahren' Steigung (der Grundgesamtheit)

Unter der Verwendung der gleichen Vorgehensweise wie in Kapitel 9 kann nun auch für den 'wahren' Achsenabschnitt ' α_0 ' bzw. der 'wahren' Steigung ' β ' (der Grundgesamtheit) ein Hypothesentest durchgeführt werden. Die Null-Hypothese lautet dabei immer, dass α_0 bzw. β gleich Null ist. Die Alternativ-Hypothese lautet entsprechend, dass α_0 bzw. β ungleich Null ist. Damit ist auch klar, dass es sich hier um einen zweiseitigen Test handelt. Wird die Null-Hypothese verworfen bzw. die Alternativ-Hypothese angenommen, d.h. wenn die berechnete standardisierte Test-Statistik bzw. Prüfgrösse grösser als der kritische Wert ist, kann ausgesagt werden, dass der berechnete Achsenabschnitt bzw. die Steigung nicht rein zufällig entstanden sind, d.h. sich also signifikant von Null unterscheiden.

Die **Test-Statistiken bzw. Prüfgrössen bezüglich des 'wahren' Achsenabschnitts ' α_0 ' bzw. der 'wahren' Steigung ' β ' (der Grundgesamtheit)** lauten wie folgt:

$$\text{für } \alpha_0: t_{(n-2)}^* = \frac{a_0}{SEE \cdot \sqrt{\frac{\sum X^2}{n \cdot \sum (X - \bar{X})^2}}}$$

$$\text{für } \beta: t_{(n-2)}^* = \frac{b}{\frac{SEE}{\sqrt{\sum (X - \bar{X})^2}}}$$

- α_0 steht für den 'wahren' Achsenabschnitt (der Grundgesamtheit)
- a_0 steht für den 'geschätzten' Achsenabschnitt der Regressionsgeraden
- β steht für die 'wahren' Steigung (der Grundgesamtheit)
- b steht für die 'geschätzte' Steigung der Regressionsgeraden
- $\bar{X}$ steht für das arithmetische Mittel der X-Werte

SEE steht den Standardfehler der Schätzung bzw. ist gleich $\sqrt{\frac{\sum (Y - Y')^2}{n - 2}}$

$t_{(n-2)}^*$ steht für die standardisierte Prüfgrösse bzw. Test-Statistik bezüglich T-Verteilung bei $(n - 2)$ Freiheitsgraden

²⁴¹ siehe auch BERENSON, LEVINE, 1986, 1999, S. 773ff.

Bei Statistik-Software-Paketen wird der jeweilige Wert des ganzen Nenners in den obigen Formeln normalerweise in einer Spalte nach den geschätzten Parameter-Angaben unter dem Begriff 'Standardfehler'²⁴² angegeben. In einer weiteren Spalte findet man meistens auch die standardisierte Prüfgrösse bzw. Test-Statistik, d.h. der jeweilige Wert der obigen Formeln, unter dem Begriff 't-Statistik' (t). In einer weiteren Spalte wird normalerweise auch noch der p-Wert (siehe Kapitel 9.6) unter dem Begriff 'p-Wert'²⁴³ angegeben, der angibt, wie gross bzw. klein die Wahrscheinlichkeit ist, dass die Null-Hypothese in jedem Fall angenommen würde, bzw. wo das Signifikanzniveau festgelegt werden müsste, dass der Entscheid zugunsten der Null-Hypothese ausfallen würde.

Generell kann ausgesagt werden, dass wenn die Regressionsparameter sich signifikant von Null unterscheiden sollen, die 't-Statistik' möglichst gross und der p-Wert möglichst klein ausfallen sollten.

10.6.7 Erweiterung des praktischen Beispiels

Aufbauend auf das 'praktische Beispiel' von Kapitel 10.4 werden weiter unten die ab Kapitel 10.6.2 bis Kapitel 10.6.6 aufgeführten 'Kennzahlen' berechnet. Dabei wird ein Signifikanzniveau von 95% unterstellt.

Abb. 85: Tabelle Berechnung SEE, Prüfgrösse ' α_0 ' und ' β ' sowie Vertrauensintervall ' Y^* '

X bzw. X^*	Y	Y' bzw. Y'^*	$(Y - Y')^2$	X^2	$(X - \bar{X})^2$	$(X^* - \bar{X})^2$
2	9	9.9	0.81	4	1	1
4	16	18.1	4.41	16	1	1
1	5	5.8	0.64	1	4	4
5	22	22.2	0.04	25	4	4
3	18	14	16	9	0	0
$\bar{X} = 3$	$\bar{Y} = 14$		$\Sigma = 21.9$	$\Sigma = 55$	$\Sigma = 10$	$\Sigma = 10$

$$SEE = \sqrt{\frac{\sum (Y - Y')^2}{n - 2}} = \sqrt{\frac{21.9}{5 - 2}} = 2.702$$

$$\begin{aligned} \alpha_0 &= a_0 \pm t_{(n-2)} \cdot SEE \cdot \sqrt{\frac{\sum X^2}{n \cdot \sum (X - \bar{X})^2}} = 1.7 \pm 3.182 \cdot 2.702 \cdot \sqrt{\frac{55}{5 \cdot 10}} = \\ &= 1.7 \pm 9.02 \Rightarrow -7.32 \leq \alpha_0 \leq 10.72 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \beta &= b \pm t_{(n-2)} \cdot \frac{SEE}{\sqrt{\sum (X - \bar{X})^2}} = 4.1 \pm 3.182 \cdot \frac{2.702}{\sqrt{10}} = \\ &= 4.1 \pm 2.72 \Rightarrow 1.38 \leq \beta \leq 6.82 \end{aligned}$$

$$Y^* = Y'^* \pm t_{(n-2)} \cdot SEE \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(X^* - \bar{X})^2}{\sum (X - \bar{X})^2}}$$

²⁴² standard error

²⁴³ p oder significance

X bzw. X*	Y' bzw. Y*	unteres Vertrauensintervall von Y* bei 5% Sig.niveau	oberes Vertrauensintervall von Y* bei 5% Sig.niveau
2	9.9	0.10	19.70
4	18.1	8.30	27.90
1	5.8	-5.08	16.68
5	22.2	11.32	33.08
3	14	4.58	23.42

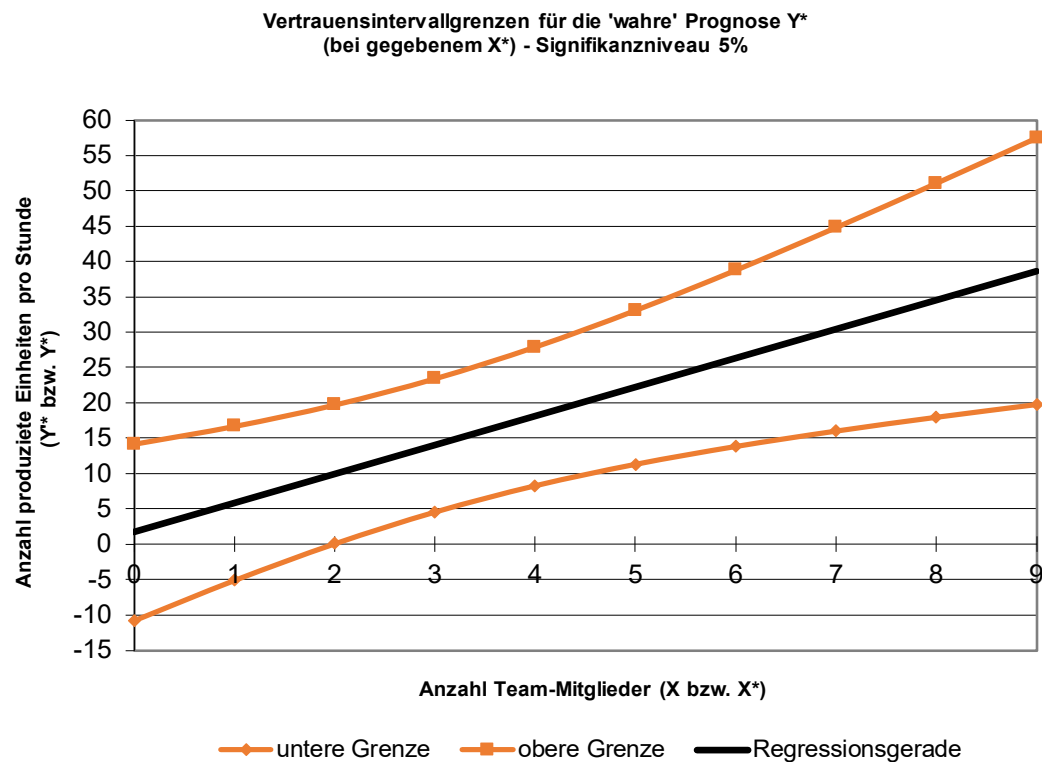
$$\text{für } \alpha_0: t_{(n-2)}^* = \frac{a_0}{\text{SEE} \cdot \sqrt{\frac{\sum X^2}{n \cdot \sum (X - \bar{X})^2}}} = \frac{1.7}{2.702 \cdot \sqrt{\frac{55}{5 \cdot 10}}} = 0.600$$

$$\text{für } \beta: t_{(n-2)}^* = \frac{b}{\frac{\text{SEE}}{\sqrt{\sum (X - \bar{X})^2}}} = \frac{4.1}{\frac{2.702}{\sqrt{10}}} = 4.798$$

Der kritische t-Wert (bei (n-2)-Freiheitsgraden (=3) und Signifikanzniveau von 5%) ist 3.182, wodurch die Null-Hypothese von α_0 angenommen und von β verworfen wird.

In der folgenden grafischen Darstellung soll verdeutlicht werden, dass die Vertrauensintervallgrenzen für die 'wahre' Prognose Y* (bei gegebenem X*) mit zunehmender Distanz vom arithmetischen Mittel der beobachteten X- und Y-Werte (d.h. hier 3 und 14) immer weiter auseinanderklaffen. Dies ist darauf zurückzuführen, dass der Prognosewert Y' mit zunehmender Distanz vom 'Schwerpunkt' der beobachteten Werte immer weniger genau bestimmt werden kann.

Abb. 86: Vertrauensintervallgrenze für die 'wahre' Prognose Y*



10.7 Multiple Regressions-Analyse

Bis jetzt wurde davon ausgegangen, dass lediglich ein Zusammenhang zwischen zwei Variablen vorhanden ist, d.h. dass die abhängige Variable 'Y' lediglich von einer unabhängigen Variablen 'X' bestimmt bzw. beeinflusst wird. Meist ist es aber so, dass **nicht nur eine, sondern mehrere unabhängige Variable die abhängige Variable beeinflussen**. Z.B. weist häufig ein kleiner Korrelationskoeffizient darauf hin, dass noch andere Einflussfaktoren bzw. Variablen einen Einfluss auf die abhängige Variable 'Y' haben. Für diesen Fall bedient man sich der sogenannten **multiplen Regressions-Analyse**. Dabei wird von der Linearitätsannahme nicht weggegangen, sondern diese wird auf alle abhängigen Variablen ausgedehnt.

Die **multiple Regressionsgerade** wird mathematisch wie folgt definiert:

$$Y' = a_0 + b_1 \cdot X_1 + b_2 \cdot X_2 \dots + b_k \cdot X_k$$

Y' steht für den geschätzten Wert der abhängigen Y-Variable bezüglich der gewählten X-Werte $[X_1, X_2 \dots X_k]$

a_0 ist der Achsenabschnitt der linearen Gleichung, wenn alle X-Werte gleich Null sind

$b_1, b_2 \dots b_k$ ist die jeweilige Steigung - auch Regressionskoeffizienten genannt, d.h. wieviel sich durchschnittlich der geschätzte Wert von Y' durch eine Veränderung lediglich einer Einheit von X_1 bzw. X_2 bzw. ... X_k verändert

$X_1, X_2 \dots X_k$ ist jeder gewählte Wert der unabhängigen Variablen ' X_1 ' bzw. ' X_2 ' bzw. ... ' X_k '

Wie bei der linearen Regressionsfunktion geht dieses multiple 'Modell' von ein paar wesentlichen Annahmen aus (siehe Kapitel 10.6.4). Falls diese Annahmen (wie z.B. keine bedingte Heteroskedastizität und keine Autokorrelation) 'verletzt' werden, ist auch die 'Güte' der multiplen Regression 'gefährdet'. Was für diesbezügliche 'Tests' durchgeführt werden müssen, was für Auswirkungen entstehen und welche 'Korrekturen' vorgenommen werden müssen, wenn diese Annahmen verletzt werden, werden hier nicht speziell behandelt²⁴⁴.

Zusätzlich zu den Annahmen keine bedingte Heteroskedastizität und keine Autokorrelation kommt bei der multiplen Regressionsgeraden noch die Annahme der nichtvorhandenen Multikollinearität hinzu:

Multikollinearität²⁴⁵ besteht dann, wenn eine hohe Korrelation zwischen zwei oder mehreren Regressionskoeffizienten²⁴⁶ besteht. Man könnte hier auch von einer 'Überspezifizierung' der Regression sprechen. Ein typischer Hinweis für Multikollinearität besteht dann, wenn die einzelnen t-Test-Statistiken der Regressionskoeffizienten unter dem kritischen Wert sind (also keine signifikante Unterscheidung von Null aufweisen), die F-Test-Statistik für das ganze Modell aber einen signifikanten Wert aufweist bzw. sehr gross ist. Ein weiterer Hinweis für Multikollinearität besteht dann, wenn sich die Vorzeichen der Regressionskoeffizienten gegenüber der logischen Erwartung entgegengesetzt verhalten. - Falls Multikollinearität vorhanden ist, sind die 'überspezifizierenden' Regressionskoeffizienten aus dem Modell zu entfernen. Z.B. Einzellohnstunden bei einer halb-automatisierten Produktionskostenstelle, deren Kostenverhalten zuerst anhand einer multiplen Regression von sowohl Maschinenstunden als auch Einzellohnstunden geschätzt wurde.

²⁴⁴ siehe z.B. bei DEFUSCO, McLEAVEY, PINTO, RUNKLE, 2001, S. 445ff.

²⁴⁵ multicollinearity

²⁴⁶ regression coefficient

Wie leicht zu sehen ist, sind solche multiplen Regressionen rechnerisch sehr aufwendig, weshalb diese nur noch mit 'Rechner' erstellt werden. Wichtig in diesem Zusammenhang ist aber, dass alle bis dato aufgeführten Überlegungen bzw. 'Kennzahlen' der Regression weiterhin ihre Gültigkeit haben: grundsätzlich hat sich gegenüber der einfachen Regression nichts geändert, nur die Anzahl der 'Dimensionen' wurde erweitert. Aus diesem Grund sind auch die Anzahl Freiheitsgrade kleiner als bei der einfachen Regression, nämlich ' $n-k-1$ '. Dabei entspricht ' k ' der Anzahl der Regressionskoeffizienten $b_1, b_2 \dots b_k$ bzw. $\beta_1, \beta_2 \dots \beta_k$. Die '-1' ergibt sich aus dem zu schätzenden bzw. nicht bekannten a_0 bzw. α_0 der Grundgesamtheit.

Zur Illustration einer möglichen multiplen Regression sei das untenstehende Beispiel²⁴⁷ aufgeführt:

Ein Immobilienhändler möchte den Käufern in etwa sagen können, wie gross die zu erwartenden Heizkosten sind. Deshalb hat er nach Studium diverser bautechnischer Untersuchungen folgende drei diesbezügliche Einflussfaktoren bestimmt, nämlich die durchschnittliche Aussentemperatur, die Dicke der Dachisolation sowie das Alter der Heizanlage. Für die letzten fünfzehn verkauften Häuser ergab dies folgendes Datenmaterial:

Abb. 87: Zusammenhang Heizkosten und drei Einflussfaktoren

Haus	Heizkosten in CHF	Durchschnittliche Aussentemperatur in °C	Dicke der Dachisolation in cm	Alter der Heiz- anlage in Jahren
1	755.00	2.00	8.00	6
2	1090.00	-2.00	10.00	10
3	498.00	2.00	18.00	3
4	130.00	16.00	15.00	8
5	278.00	18.00	13.00	6
6	604.00	-1.00	13.00	5
7	1072.00	-12.00	15.00	7
8	876.00	-14.00	25.00	10
9	695.00	-6.00	23.00	11
10	362.00	14.00	5.00	5
11	220.00	12.00	30.00	4
12	619.00	9.00	13.00	1
13	1208.00	-7.00	12.00	15
14	966.00	4.00	10.00	7
15	217.00	16.00	20.00	6

²⁴⁷ siehe auch MASON, LIND, MARCHAL, 1967, ¹⁰2000, S. 468ff. sowie SIEGEL, ⁴2000, S. 470ff. und DEFUSCO, McLEAVEY, PINTO, RUNKLE, 2001, S. 429ff.

Aufgrund der oben angegebenen Daten wurde anhand einer Statistik-Software folgende Auswertungen ermittelt:

Abb. 88: Auswertung Regressions-Statistik und Varianz-Analyse Heizkosten 3 Einflussfaktoren

Regressions-Statistik				
Multipler Korrelationskoeffizient	0.9213			
Determinationskoeffizient	0.8489			
Adjustierter Determinationskoeffizient	0.8076			
Standardfehler 'SEE'	154.4297			
Beobachtungen	15			

Varianz-Analyse (analysis of variance bzw. ANOVA)					
	Freiheitsgrade (df)	Quadratsummen (SS)	Mittlere Quadratsumme (MS)	Prüfgrösse (F)	F krit
Regression 'R'	3	1'473'287.33	491'095.78	20.592	0.000
Residuen 'E'	11	262'334.00	23'848.55		
Total 'T'	14	1'735'621.33			

	Koeffizienten	Standardfehler	t-Statistik	P-Wert
Konstante bzw. Achsenabschnitt	934.998	152.397	6.135	0.000
X Variable 1 bzw. Regressionskoeffizient 'Aussentemperatur'	-27.195	4.674	-5.818	0.000
X Variable 2 bzw. Regressionskoeffizient 'Isolationsdicke'	-19.555	6.166	-3.171	0.009
X Variable 3 bzw. Regressionskoeffizient 'Alter Heizanlage'	13.938	13.893	1.003	0.337

Durch das Hinzufügen eines Regressionskoeffizienten wird der Determinationskoeffizient automatisch grösser, auch wenn dadurch die Regressionsfunktion nicht mehr 'erklärt'. Dieser (mathematische) Effekt wird beim 'adjustierten Determinationskoeffizienten' eliminiert.

Daneben erhält gegenüber den in früheren Kapiteln erwähnten 'Kennzahlen' der Regression **eine neue Test-Statistik bzw. Prüfgrösse** eine besondere Bedeutung. **Dabei geht es um die Frage, ob alle 'wahren' Regressionskoeffizienten ' $\beta_1, \beta_2 \dots \beta_k$ ' der Grundgesamtheit sich von Null unterscheiden.** Dies wird auch **Varianzanalyse genannt bzw. ANOVA**²⁴⁸.

Die **Null-Hypothese (und somit auch die Alternativ-Hypothese)** bezüglich der 'wahren' Regressionskoeffizienten ist somit wie folgt zu formulieren:

$$H_0 = \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_k = 0$$

$$H_1 = \text{nicht alle } \beta\text{'s sind Null}$$

Die diesbezügliche **Test-Statistik bzw. Prüfgrösse** bezüglich der 'wahren' Regressionskoeffizienten ist eine *F*-Verteilung mit 'k' Freiheitsgraden im Zähler und 'n - k - 1' Freiheitsgraden im Nenner und berechnet sich wie folgt:

$$F_{(k; n-k-1)}^* = \frac{r^2}{(1-r^2)} \cdot \frac{(n-k-1)}{k} \quad \text{bzw.} \quad \frac{SSR}{SSE} \cdot \frac{(n-k-1)}{k}$$

r^2 ist der Determinationskoeffizient
 SSR ist die Quadratsumme der Regressionsabweichung
 bzw. $\sum (Y' - \bar{Y})^2$
 SSE ist die Quadratsumme der Residuenabweichung
 (auch als ε bezeichnet) bzw. $\sum (Y - Y')^2$

²⁴⁸ analysis of variance

In der Tabelle der F -Verteilung in der Tabellen-Sammlung (Seite 212ff) kann bei einem Signifikanzniveau von 5% der 'kritische' Wert von 3.59 herausgelesen werden (siehe hervorgehobener Tabellen-Wert im 'Auszug' unten).

Das Resultat gemäss der oben aufgeführten Test-Statistik bzw. Prüfgrösse ist aber '20.592'. Dies bedeutet, dass die Null-Hypothese verworfen und die Alternativ-Hypothese angenommen werden muss, d.h. dass sich mindestens einer der 'wahren' Regressionskoeffizienten ' β_1 , β_2 und β_3 ' der Grundgesamtheit von Null unterscheiden.

Mit dieser Prüfgrösse kann die 'Güte' der ganzen multiplen Regression gemessen werden. Im vorliegenden Beispiel ist sie sehr hoch. Erst wenn diese 'Güte' als angemessen bezeichnet werden kann, sind die Hypothesentests bezüglich dem 'wahren' Achsenabschnitt bzw. der 'wahren' Regressionskoeffizienten' vorzunehmen (siehe Kapitel 10.6.6).

Die t-Statistik bzw. die entsprechenden P-Werte zeigen nun aber auf, dass der Regressionskoeffizient 'Alter Heizanlage' nicht dem Signifikanzniveau von 5% entspricht. Dies bedeutet, dass 'statistisch' gesehen, das Alter der Heizanlage keinen signifikanten Einfluss auf die Heizkosten ausübt. Ein möglicher Grund könnte darin liegen, dass auch bei älteren Heizanlagen stets versucht wird, durch technische Verbesserungen bzw. Austausch gewisser Teile den Verbrauch an Brennstoff zu senken. Aus diesem Grund ist es besser, die multiple Regression ohne diesen Regressionskoeffizienten durchzuführen.

Die Auswertung der Statistik-Software würde mit diesen 'reduzierten' Daten wie folgt aussehen:

Abb. 89: Auswertung Regressions-Statistik und Varianz-Analyse Heizkosten 2 Einflussfaktoren

Regressions-Statistik	
Multipler Korrelationskoeffizient	0.9138
Determinationskoeffizient	0.8350
Adjustierter Determinationskoeffizient	0.8075
Standardfehler 'SEE'	154.4713
Beobachtungen	15

Varianz-Analyse (analysis of variance bzw. ANOVA)					
	Freiheitsgrade (df)	Quadratsummen (SS)	Mittlere Quadratsumme (MS)	Prüfgrösse (F)	F krit
Regression 'R'	2	1'449'284.68	724'642.34	30.369	0.000
Residuen 'E'	12	286'336.65	23'861.39		
Total 'T'	14	1'735'621.33			

	Koeffizienten	Standardfehler	t-Statistik	P-Wert
Konstante bzw. Achsenabschnitt	1'045.823	105.012	9.959	0.000
X Variable 1 bzw. Regressionskoeffizient 'Aussentemperatur'	-29.663	3.976	-7.461	0.000
X Variable 2 bzw. Regressionskoeffizient 'Isolationsdicke'	-19.933	6.156	-3.238	0.007

Der adjustierte Determinationskoeffizient ist gegenüber der 'alten' Lösung - abgesehen von einem unwesentlichen Rundungsfehler - gleich gross, was genau der Überlegung dieser Kennzahl entspricht. Mit der 'reduzierten' multiplen Regressionsgerade können also weiterhin rund 80% der Heizkosten erklärt werden; nicht erklärt werden aber auch weiterhin rund 20%.

Der 'neue' kritische F-Wert beträgt nun mit den 'reduzierten' Daten bei einem Signifikanzniveau von 5% '3.89' (siehe kursiver, hervorgehobener Wert im 'Auszug' oben). Dieser ist im Vergleich zur Test-Statistik bzw. Prüfgrösse von '30.369' bedeutend kleiner, was wiederum bedeutet, dass die Null-Hypothese verworfen und die Alternativ-Hypothese angenommen werden muss, d.h. dass sich alle 'wahren' Regressionskoeffizienten ' β_1 und ' β_2 ' der Grundgesamtheit von Null unterscheiden.

Die t-Statistik bzw. die entsprechenden P-Werte zeigen nun aber auf, dass die verbliebenen Regressionskoeffizient 'Aussentemperatur' und 'Isolationsdicke' immer noch ein grösseres Signifikanzniveau als 5% aufweisen (P-Wert kleiner als 0.05).

Der Immobilienhändler könnte nun aufgrund dieser 'reduzierten' multiplen Regressionsgeraden die zu erwartenden Heizkosten für jeden Käufer berechnen. Z.B. für einen Käufer eines Hauses, das in einer Region mit einer durchschnittlichen Aussentemperatur von 12°C angesiedelt ist und eine Dicke der Dachisolation von 25cm aufweist, würde dies folgende Heizkosten ergeben:

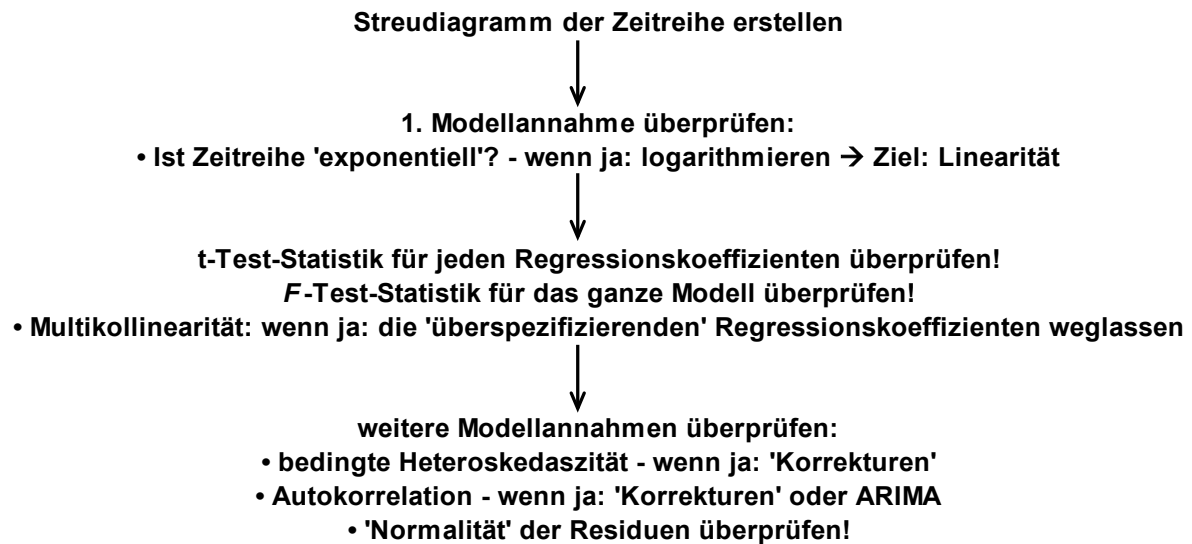
$$Y' = 1'045.823 - 29.663 \cdot 12^\circ C - 19.933 \cdot 25cm = \text{CHF } 191.542$$

Müsste der Immobilienhändler aber mit einem 95% Vertrauensniveau die voraussichtlichen Heizkosten angeben (Einzel-Prognose), so lägen diese 'statistisch' zwischen CHF -190.28 und CHF 573.38.

10.8 Schematische Vorgehensweise bei (multipler) Regressions-Analyse

Bei der Anwendung der (multiplen) Regressions-Analyse ist es sinnvoll, wenn systematisch vorgegangen wird. Aus diesem Grund ist zusammenfassend folgendes Vorgehens-Schema aufgeführt.

Abb. 90: Schematische Vorgehensweise bei (multipler) Regressions-Analyse



10.9 Repetitionsfragen

10.9.1 Problemstellung aus der Kostenrechnung²⁴⁹

Ein Geschäftsführer eines Beratungsunternehmens, möchte feststellen, welchen Einfluss die Leistung bzw. die an Kunden verrechnete Beraterstunden auf die Höhe der Gemeinkosten ausübt. Folgende 'historische' Daten seien ihm bekannt:

Total monatliche Gemeinkosten (in CHF)	an Kunden verrechnete, monatliche Beraterstunden (in Arbeits-Std.)
630'000.00	2'800
750'000.00	4'300
820'000.00	5'600
890'000.00	6'200
980'000.00	7'400
1'090'000.00	8'500

- Berechnen Sie anhand der Methode der kleinsten Quadrate die Gemeinkosten als lineare Funktion der an die Kunden verrechneten Beraterstunden.
- Berechnen Sie den dazugehörigen Korrelations- und Determinationskoeffizienten.

10.9.2 Problemstellung aus dem Absatzbereich

Ein Mineralwasser-Unternehmen hat in den letzten sechs Jahren folgenden Absatz bzw. Umsatz ausgewiesen:

Jahr	Verkaufs- menge (in 1'000 Stk.)	Verkaufs- preis (in CHF pro Stk.)	Umsatz (in 1'000 CHF)
2018	1'500	1.80	2'700.00
2019	1'700	1.80	3'060.00
2020	2'200	2.00	4'400.00
2021	2'300	2.00	4'600.00
2022	2'800	2.20	6'160.00
2023	3'300	2.20	7'260.00

- Berechnen Sie für das Jahr 2024 den prognostizierten Umsatz nach der Methode der kleinsten Quadrate unter der Annahme, dass keine Preisveränderung für das Mineralwasser gegenüber dem Vorjahr erwartet wird.
- Berechnen Sie den dazugehörigen Korrelations- und Determinationskoeffizienten.

²⁴⁹ siehe auch HORNGREN, FOSTER, DATAR, 1962, ⁹1997, S. 371.

10.9.3 Zusammenhang von Reparaturkosten und Alter bei PKW's²⁵⁰

Ein grösseres Unternehmen, das eine ganze 'Flotte' von PKW's für ihre Vertriebsmitarbeiter besitzt, möchte wissen, ob zwischen dem Alter ihrer PKW's und den jährlich anfallenden Reparaturkosten tatsächlich ein Zusammenhang besteht. Aus der Betriebsbuchhaltung sind folgende Daten bezüglich der PKW-Flotte bekannt.

Alter der PKW's in Jahren X	Reparatur- kosten p.a. in CHF Y
1.00	1'300.00
1.50	1'900.00
2.00	2'800.00
2.25	2'800.00
2.50	3'200.00
3.00	3'500.00
3.25	3'500.00
3.50	3'900.00
3.50	4'200.00
4.00	4'500.00

- Berechnen Sie mit Hilfe der Methode der kleinsten Quadrate die Parameter der linearen Regressionsfunktion der Reparaturkosten in Bezug auf das Alter und bezeichnen Sie die ermittelten Parameterwerte (betriebswirtschaftliche Interpretation).
- Treffen Sie eine Aussage über die Stärke und die Richtung des Zusammenhanges zwischen dem Alter der PKW's und der Höhe der jährlichen Reparaturkosten unter Verwendung des Korrelations- bzw. Determinationskoeffizienten.
- Das Unternehmen kann relativ günstig einen PKW erwerben, der jedoch schon drei Jahre alt ist. Mit welchen durchschnittlichen jährlichen Reparaturkosten muss die Firma auf der Grundlage Ihrer Analyse rechnen?

²⁵⁰ siehe auch ECKSTEIN, 1998, S. 31+133f.

10.9.4 Zusammenhang Werbeaufwand und Absatz²⁵¹

Ein Getränke-Produzent hat acht Softdrink-Marken in seinem Sortiment. Im Jahr 2000 wiesen diese folgenden Produktionsausstoss (in 1'000 Hektoliter) und Werbeaufwendungen (in Mio. CHF) auf:

Softdrink	Werbeaufwand (Mio CHF)	Absatz (1'000 hl)
A	21	664
B	17	406
C	21	368
D	20	324
E	14	254
F	8	228
G	9	210
H	10	194

- Beschreiben Sie anhand der Methode der kleinsten Quadrate die Abhängigkeit von Absatz und Werbeaufwand. (Begründen Sie Ihre Aussagen nicht nur verbal, sondern untermauern Sie diese mit Berechnungen.)
- Bestimmen Sie anhand einer Masszahl die 'Güte' Ihres errechneten Zusammenhanges und beschreiben Sie diesen auch noch verbal.

²⁵¹ siehe auch ECKSTEIN, 1998, S. 38+141.

10.9.5 CAPM

In der Finanzmarkt-Theorie wird das **Capital Asset Pricing Modell (CAPM)**²⁵² dazu benutzt, die erwartete Rendite einer Investition (z.B. Aktie der Gesellschaft A) zu ihrem systematischen, marktbezogenen Risiko in Beziehung zu setzen. Da das CAPM unterstellt, dass alle Investoren das voll diversifizierte Marktportfolio besitzen, ist das unsystematische, wegdiversifizierbare Risiko irrelevant; somit verbleibt lediglich das nicht-diversifizierbare Risiko bzw. das systematische Risiko.

Beim CAPM wird das systematische bzw. marktbezogene Risiko lediglich via das Markt-Portefeuille gemessen. Da die risikolose Rendite (z.B. Bundesobligationen), wie der Name sagt, kein Risiko aufweist, stellt sie den Grundsockel dar, auf dem die ganze Beziehung 'aufgesetzt' wird. Unter Berücksichtigung diverser Annahmen kann schliesslich folgender Zusammenhang festgestellt werden:

$$E(R_i) = R_F + \beta_i \cdot [E(R_M) - R_F]$$

$E(R_i)$	steht für die erwartete Rendite der Investition 'i'
R_F	ist die risikolose Rendite
$E(R_M)$	ist die erwartete Rendite des Markt-Portefeuilles
β_i	ist die Sensitivität oder Beziehung der Rendite der Investition 'i' bezüglich der Rendite des Markt-Portefeuilles
$[E(R_M) - R_F]$	wird auch Markt-Risiko-Prämie (market risk premium) genannt

In der obigen Gleichung reflektiert das Beta (β) das Risiko der Investition 'i', das sie dem Markt-Portefeuille hinzufügt. Weist die Investition 'i' ein grösseres Risiko als das Markt-Portefeuille auf ($\beta > 1$), dann ist dies modell-theoretisch nur dann gerechtfertigt, wenn die Investition 'i' eine entsprechend der CAPM-Funktion höhere Rendite aufweist; Weist die Investition 'i' ein kleineres Risiko als das Markt-Portefeuille auf ($\beta < 1$), dann ist dies nur dann gerechtfertigt, wenn die Investition 'i' eine entsprechend der CAPM-Funktion niedrigere Rendite aufweist.

Obwohl das CAPM eine ex ante Betrachtung ist, d.h. einen zukünftig erwarteten Zusammenhang reflektiert, wird in der Praxis das Beta meist aufgrund historischer Daten ermittelt. Zudem wird unterstellt, dass das Markt-Portefeuille durch einen Marktindex (z.B. Dow Jones Industrial Average (DJIA)) approximiert werden kann.

²⁵² siehe DAMODARAN, 1997, ²2001, S. 163ff. und BRIGHAM, HOUSON, 1978, ⁸1998, S. 176ff.

Aufgrund der letzten zwölf Monate wurden folgende Daten und Berechnungen bezüglich der durchschnittlichen, monatlichen Markttrendite (via Marktindex) und der durchschnittlichen, monatlichen Rendite der Gesellschaft A festgestellt.

Monat	Ø Markttrendite	Ø Rendite Ges. A	$(X - \bar{X}) \cdot (Y - \bar{Y})$	$(X - \bar{X})^2$	$(Y - \bar{Y})^2$
1	2.87%	1.56%	0.000072	0.000217	0.000024
2	-0.29%	0.11%	0.000163	0.000285	0.000093
3	-1.46%	0.90%	0.000049	0.000817	0.000003
4	4.41%	1.07%	-0.000001	0.000907	0.000000
5	3.21%	2.32%	0.000226	0.000328	0.000156
6	-2.20%	-0.45%	0.000548	0.001295	0.000232
7	-2.80%	-0.94%	0.000845	0.001763	0.000405
8	-2.47%	-0.40%	0.000570	0.001496	0.000217
9	1.25%	0.50%	0.000008	0.000002	0.000033
10	5.51%	2.83%	0.000723	0.001691	0.000309
11	6.51%	3.95%	0.001471	0.002613	0.000828
12	2.24%	1.42%	0.000029	0.000071	0.000012
	$\bar{X} =$ 1.40%	$\bar{Y} =$ 1.07%	0.004702	0.011484	0.002310
	$s =$ 3.23%	$s =$ 1.45%			

Zusatzangabe: Über den oben angegebenen Zeitraum wurde eine risikolose Jahres-Rendite von 6.8% bzw. 0.55% pro Monat festgestellt

Stellen Sie die Beziehung zwischen der Rendite der Gesellschaft A und der Markttrendite anhand eines Streudiagramms dar. Ermitteln Sie anschliessend aufgrund obiger Angaben das Beta (β) und die risikolose Rendite (R_f) gemäss CAPM. Machen Sie zudem eine Aussage über die 'Güte' der Beziehung zwischen der Rendite der Gesellschaft A und der Markttrendite.

10.9.6 Kundenauftrag

Die Produktionsfirma Sioux²⁵³ hat einen Kundenauftrag über 50 Einheiten ihres Produktes erhalten. Der Kunde ist bereit CHF 32.00 pro Einheit zu bezahlen. Vor dem neuen Kundenauftrag hat die Sioux geplant, 600 Einheiten ihres Produktes herzustellen. Aufgrund einer eingehenden IST-Kosten-Analyse der letzten zwölf Monate wurden folgende Daten ermittelt.

Monat	Anzahl hergestellte Einheiten	IST-Kosten in CHF (total)
1	544	16'206.00
2	566	16'838.00
3	518	15'125.00
4	570	17'060.00
5	588	17'202.00
6	571	16'762.00
7	508	15'228.00
8	646	18'686.00
9	521	15'520.00
10	524	15'486.00
11	503	15'266.00
12	633	18'902.00

Anhand einer Statistik-Software wurden folgende Auswertungen aufgrund der oben aufgeführten Daten ermittelt:

Regressions-Statistik						
Multipler Korrelationskoeffizient	0.9885					
Determinationskoeffizient	0.9771					
Adjustierter Determinationskoeffizient	0.9748					
Standardfehler 'SEE'	206.5820					
Beobachtungen	12					

Varianz-Analyse (analysis of variance bzw. ANOVA)						
	Freiheitsgrade (df)	Quadratsummen (SS)	Mittlere Quadratsumme (MS)	Prüfgrösse (F)	F krit.	
Regression 'R'	1	18'210'547.55	18'210'547.55	426.71	0.000	
Residuen 'E'	10	426'761.37	42'676.14			
Total 'T'	11	18'637'308.92				

	Koeffizienten	Standardfehler	t-Statistik	P-Wert	Untere 95%	Obere 95%
Konstante bzw. Achsenabschnitt	1'316.685	738.563	1.783	0.105	-328.935	2'962.305
X Variable bzw. Regressionskoeffizient 'Anzahl hergestellte Einheiten'	27.268	1.320	20.657	0.000	24.327	30.210

Vertrauensintervall für die 'wahre' Einzel-Prognose Y* (bei gegebenem X*)			
X bzw. X*	Y* bzw. Y**	unteres Vertrauensintervall von Y* bei 5% Sig.niveau	oberes Vertrauensintervall von Y* bei 5% Sig.niveau
600	17'677.78	17'182.78	18'172.79
625	18'359.50	17'841.09	18'877.90
650	19'041.21	18'490.50	19'591.92

Welche generellen Aussagen und welche Aussagen betreffend Kundenauftrag können Sie aufgrund der oben aufgeführten Daten bzw. Auswertungen machen?

²⁵³ siehe auch MAGEE, 1986, S. 117ff.

11 ZEITREIHENANALYSE UND PROGNOSE²⁵⁴

Bei **Zeitreihen**, d.h. bei der **Erfassung von Merkmalswerten über die Zeit hinweg**, besteht im Gegensatz zu den üblichen Zusammenhängen von zwei Variablen die **Gefahr, dass die Merkmalswerte voneinander abhängen**. Dadurch wird auch die Annahme verletzt, dass die beobachteten Werte einer rein zufälligen Stichprobe aus der Grundgesamtheit entsprechen. Um diese Abhängigkeit der beobachteten Werte mit einzubeziehen, **bedient man sich bei der Zeitreihenanalyse spezieller Methoden**.

Das **Hauptziel der Zeitreihenanalyse besteht darin, Prognosen für die Zukunft zu erstellen**. Dies **bedingt aber, dass ein Modell 'kreiert' wird, welches das Verhalten der Zeitreihe charakterisiert**.

Es gibt sehr unterschiedliche Ansätze, wie die Zeitreihenanalyse durchgeführt werden kann. In den folgenden Ausführungen wird zuerst ausführlich auf die "klassische" Zeitreihenzerlegung²⁵⁵ eingegangen und anschliessend auf andere Ansätze, wie das 'exponentielle Glätten'²⁵⁵ und das 'ARIMA'-Modell.

11.1 'Klassische' Zeitreihenzerlegung

11.1.1 Zeitreihenmodelle

Die 'klassische' Zeitreihenanalyse geht von einem klaren, intuitiv verständlichen Ansatz aus. Dabei werden die Quartals- bzw. Monats-Zeitreihen in drei Grund-Komponenten aufgeteilt und versucht, diese zu schätzen.

Die drei Grund-Komponenten setzen sich wie folgt zusammen:

- **langfristige, überjährige Trend-Komponente**²⁵⁶ 'T',
- **saisonale, unterjährig wiederkehrende Komponente**²⁵⁷ 'S' und
- **'irreguläre', rein zufällige bzw. Rest- oder Residual-Komponente**²⁵⁸ 'I'.

Da die 'klassische' Zeitreihenzerlegung eine mögliche (konjunktur-)zyklische, über mehrere Jahre hinweg sich wiederholende Komponente²⁵⁹ nicht 'herausfiltern' kann, wird diese hier auch nicht speziell aufgeführt.

Die Trend-Komponente charakterisiert das langfristige Verhalten der Zeitreihen und ist üblicherweise eine lineare Funktion (siehe auch Kapitel 10.6). Sie widerspiegelt das generelle überjährige Verhalten.

Die saisonale Komponente zeigt den wiederkehrenden Effekt innerhalb eines Jahres auf. Je nach Saisonalität wird dabei pro Quartal oder Monat ein Saisonfaktor ermittelt, der aussagt wie gross die durchschnittliche Abweichung dieses einzelnen Quartals oder dieses einzelnen Monats gegenüber den anderen ist. Es wird davon ausgegangen, dass die saisonale Komponente exakt unterjährig wiederkehrend ist.

²⁵⁴ time series and forecasting

²⁵⁵ exponential smoothing

²⁵⁶ trend

²⁵⁷ seasonal component

²⁵⁸ irregular component

²⁵⁹ cyclic component

Die irreguläre Komponente widerspiegelt die Restgrösse bzw. die rein zufällige Residualkomponente, die nicht erklärt werden kann. Sie enthält somit alle nicht erklärten, einmaligen Ereignisse, die **nicht** systematisch wiederkehren. Sie sollte eigentlich die Charakteristik eines 'weissen Rauschens' (siehe Kapitel 11.2.2.2)) entsprechen und z.B. eine möglichst kleine Standardabweichung aufweisen.

Das Verhalten der drei Grund-Komponenten kann sowohl additiv als auch multiplikativ in einem Modell umschrieben werden. Welches der beiden Modelle verwendet wird hängt vom Verhalten der Zeitreihe ab.

Die folgende Darstellung²⁶⁰ soll den Unterschied zwischen dem additiven Modell²⁶¹ und dem multiplikativen Modell²⁶² visualisieren

Abb. 91: Unterschied additives und multiplikatives Modell

	1 kein saisonaler Effekt	2 additiver Saison-Effekt	3 multiplikativer Saison-Effekt
A kein Trend			
B additiver Trend			
C multiplikativer Trend			

Wichtig dabei ist, dass man zuerst die Zeitreihe grafisch aufzeichnet. Anschliessend muss visuell untersucht werden, ob die unterjährig wiederkehrende saisonale Abweichung über die Zeit hinweg den gleichen absoluten Betrag aufweist (additives Modell) oder ob sie über die Zeit hinweg grösser wird (multiplikatives Modell). In den weiteren Ausführungen wird lediglich 'kein Trend' oder der 'additive Trend', also die Fälle A und B, weiterverfolgt. Ein multiplikativer Trend wäre sehr wohl möglich (siehe Kapitel 10.2), ist aber meist nur kurzfristiger Natur.

Das **additive Zeitreihenmodell** sieht wie folgt aus:

$$Y = T + S + I$$

- Y sind die beobachteten Werte einer Zeitreihe
- T ist die langfristige, überjährige Trend-Komponente
- S ist die saisonale, unterjährig wiederkehrende Komponente
- I ist die irreguläre, rein zufällige Residualkomponente

²⁶⁰ siehe auch MAKRIDAKIS, WHEELWRIGHT, HYNDMAN, ³1998, S. 138.

²⁶¹ additiv model

²⁶² multiplicative model

Das **multiplikative Zeitreihenmodell** sieht wie folgt aus:

$$Y = T \cdot S \cdot I$$

11.1.2 Methode der gleitenden Durchschnitte

Der gleitende Durchschnitt²⁶³ ist eine Folge von arithmetischen Mitteln, die aus den beobachteten Werten der Zeitreihe 'Y' gebildet werden. Dabei wird der gleitende Durchschnitt aus einer gleichbleibenden Anzahl (hier Quartale bzw. Monate) zeitlich jeweils benachbarter Beobachtungswerten berechnet und dem 'in der Mitte' der Werte liegenden Zeitpunkt zugeordnet.²⁶⁴

Bei der Berechnung des gleitenden Durchschnitts ist zu unterscheiden, ob ein gleitender Durchschnitt für eine gerade (z.B. Quartale, Monate) oder ungerade (z.B. Trimester) gleichbleibende Anzahl zeitlich jeweils benachbarter Beobachtungswerte ermittelt wird. Ähnlich wie bei der Quartils- bzw. Median-Berechnung entsteht auch hier die Problematik, dass die berechneten gleitenden Durchschnitte aus den Beobachtungswerten lediglich bei einer ungeraden Anzahl von Werten des Zeitabschnitts eindeutig einem Zeitpunkt zugeordnet werden können. Ist die Anzahl von Werten des Zeitabschnitts aber gerade, müssen die gleitenden Durchschnitte 'zentriert'²⁶⁵ werden, d.h. man 'interpoliert' zwischen zwei benachbarten gleitenden Durchschnitten, um einen (neuen) gleitenden Durchschnitt zu erhalten, der genau einem Zeitpunkt zugeordnet werden kann.

Die oben erwähnten Ausführungen werden anhand eines Beispiels verdeutlicht:

Abb. 92: Berechnungsbeispiel 'zentrierter' gleitender Durchschnitt

Jahr	Quartal	Umsatz	gleitender Durchschnitt für die vier Quartale	«zentrierter» gleitender Quartals- Durchschnitt
1999	1	7	{	{
	2	5		
	3	10		
	4	13		
2000			8.750	{
			9.000	
			9.250	{
			9.500	
	1	8	10.000	{
	2	6		
	3	11		{
	4	15		
...	...	...	...	...

²⁶³ moving-average

²⁶⁴ siehe BOHLEY, ⁶1996, S. 260.

²⁶⁵ centered moving average

Wie aus der obigen Darstellung ersichtlich ist, kann der 'zentrierte' gleitende Durchschnitt nicht für alle Zeitpunkte ermittelt werden; es fehlen z.B. hier je zwei Werte. Die Anzahl 'fehlender' Werte entspricht der Hälfte der Anzahl Werte, die eine Saison ausmachen, d.h. bei Quartalen ist dieser Wert '2', bei Monaten '6'.

11.1.3 Vorgehensweise bei der Berechnung der Zeitreihenkomponenten²⁶⁶

Um die einzelnen Komponenten des Zeitreihenmodells zu bestimmen, ist es sinnvoll wie folgt vorzugehen:

- Aus den beobachteten Werten der Zeitreihe 'Y' wird eine **neue Zeitreihe nach der Methode des gleitenden Durchschnitts**²⁶⁷ ermittelt. Dabei werden durch die Durchschnittsbildung über das ganze Jahr die saisonalen Effekte eliminiert und die irreguläre Komponente reduziert. Was noch übrig bleibt ist lediglich die Trend-Komponente (und natürlich auch eine allfällige zyklische Komponente).
- **Die beobachteten Werte der Zeitreihe 'Y' werden nun durch die entsprechenden nach der Methode des gleitenden Durchschnitts berechneten Werte dividiert (multiplikatives Modell) [beim additiven Modell: abgezogen].** Der dadurch ermittelte Faktor [beim additiven Modell: Abweichung] enthält nun nur noch den saisonalen Effekt und den irregulären Effekt.
- Da die einzelnen Faktoren [beim additiven Modell: Abweichungen] auch für das gleiche Quartal bzw. für den gleichen Monat von Jahr zu Jahr unterschiedlich ausfallen, wird **das arithmetische Mittel für die selben Quartale bzw. Monate aller Jahre der Zeitreihe ermittelt.** Dadurch erhält man den durchschnittlichen Saisonfaktor [beim additiven Modell: durchschnittliche Saisonabweichung].
- **In einem weiteren Schritt ist zu beachten, dass die Summe der (durchschnittlichen) Saisonfaktoren gleich gross ist wie die Anzahl Quartale bzw. Monate [beim additiven Modell: gleich Null ist].** Ist dies nicht der Fall sind alle (durchschnittlichen) Saisonfaktoren linear zu korrigieren, d.h. mit einem Korrekturfaktor zu multiplizieren [beim additiven Modell: d.h. um den gleichen Korrekturwert zu korrigieren].
- Der Korrekturfaktor des multiplikativen Modells ermittelt sich aus der Anzahl Quartale bzw. Monate dividiert durch die Summe der durchschnittlichen Saisonfaktoren. Beim additiven Modell berechnet sich hingegen der Korrekturwert aus der mit '-1' multiplizierten Summe der durchschnittlichen Saisonfaktoren dividiert durch die Anzahl Quartale bzw. Monate.
- **Wenn nun die beobachteten Werte der Zeitreihe 'Y' durch den (durchschnittlichen) korrigierten Saisonfaktor dividiert werden, erhält man eine neue, saisonbereinigte**²⁶⁸ **Zeitreihe.**
- **Diese saisonbereinigte Zeitreihe wird nun verwendet um anhand einer Regression (siehe Kapitel 10.6) den langfristigen, überjährigen Trend zu ermitteln. Diese Regressions- bzw. Trendgerade enthält keine saisonalen Effekte und wird zur Ermittlung der saisonbereinigten (Trend-)Prognose herangezogen werden.**
- **In einem weiteren Schritt wird die saisonbereinigte (Trend-)Prognose noch saisonalisiert, indem der saisonbereinigte (Trend-)Prognosewert mit dem entsprechenden (durchschnittlichen) korrigierten Saisonfaktor multipliziert [beim additiven Modell: dazugezählt] wird.**

Obwohl die obenstehende Vorgehensweise prima vista kompliziert erscheint, ist sie doch relativ einfach zu berechnen und zu interpretieren.

²⁶⁶ in Anlehnung an die Vorgehensweise bei SIEGEL, 42000, S. 573.

²⁶⁷ moving-average method

²⁶⁸ seasonally adjusted

11.1.4 Beispiel: Umsatzentwicklung Industrie-Unternehmen

Anhand eines voll durchgerechneten Beispiels²⁶⁹ soll die Vorgehensweise und die durchzuführenden Berechnungen der 'klassischen' Zeitreihenanalyse visualisiert werden.

Den offiziellen Jahresabschlüssen des Industrie-Unternehmens seien folgende Umsätze in den Jahren 1996 bis 2002 entnommen worden:

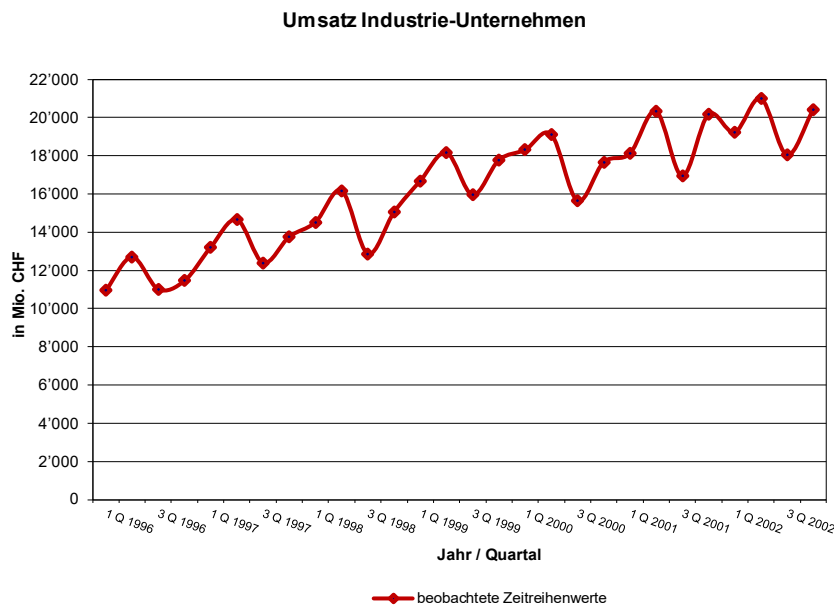
Abb. 93: Tabelle Umsatzentwicklung Industrie-Unternehmen

Jahr	Quartal	Umsatz in Mio. CHF
1996	1	10'954
1996	2	12'694
1996	3	11'012
1996	4	11'454
1997	1	13'208
1997	2	14'658
1997	3	12'396
1997	4	13'758
1998	1	14'520
1998	2	16'168
1998	3	12'868
1998	4	15'048
1999	1	16'684
1999	2	18'160
1999	3	15'952
1999	4	17'770
2000	1	18'304
2000	2	19'112
2000	3	15'640
2000	4	17'662
2001	1	18'110
2001	2	20'328
2001	3	16'934
2001	4	20'164
2002	1	19'224
2002	2	20'996
2002	3	18'046
2002	4	20'414

²⁶⁹ in Anlehnung an das Beispiel von SIEGEL, ⁴2000, S. 573ff.

Am Anfang jeder Zeitreihenanalyse ist die beobachtete Zeitreihe grafisch darzustellen (siehe untenstehende Grafik). Erst aufgrund dieser Visualisierung ist es möglich zu entscheiden, ob ein 'additives Modell' oder ein 'multiplikatives Modell' der Zeitreihenzerlegung anzuwenden ist.

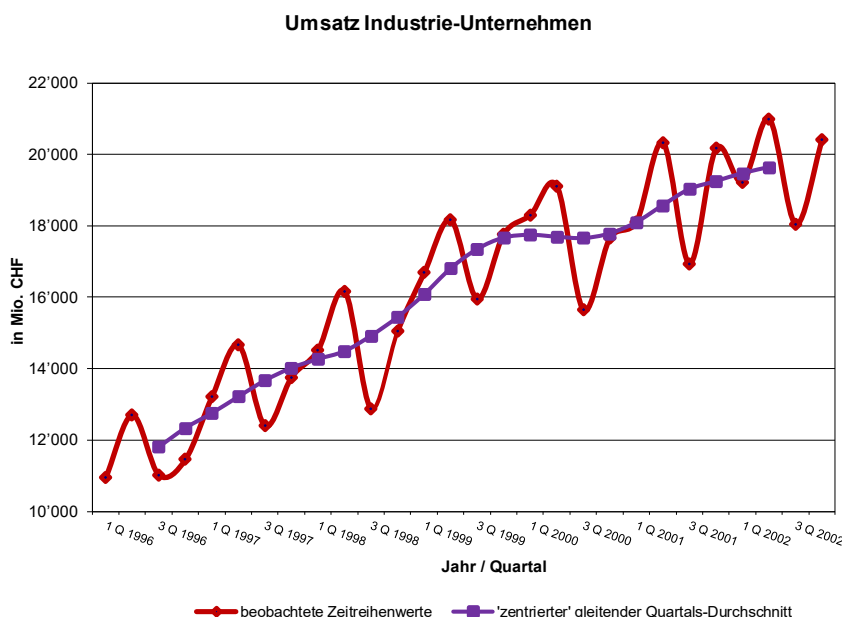
Abb. 94: Umsatzentwicklung Industrie-Unternehmen



Aufgrund der obenstehenden grafischen Darstellung der beobachteten Umsätze ist es nicht klar ersichtlich, welches Modell der Zeitreihenzerlegung anzuwenden ist. Aus diesem Grund werden in der Folge beide Modelle aufgeführt.

Bei beiden Modellen wird aber als erster Schritt auf der Basis der beobachteten Automobilumsätze eine neue Zeitreihe nach der Methode der gleitenden Durchschnitte (hier: gleitende Quartals-Durchschnitte) gebildet. Diese sieht grafisch wie folgt aus:

Abb. 95: 'Zentrierte' gleitende Quartals-Durchschnitte Industrie-Unternehmen



Durch die Berechnung der 'zentrierten' gleitenden Durchschnitte aus den beobachteten Zeitreihenwerten (Berechnungsvorgehensweise siehe Kapitel 11.1.2), bei denen der saisonale Einfluss eliminiert und der 'irreguläre' Einfluss reduziert wurde, wird die Basis für die eigentliche Zeitreihenzerlegung geschaffen. Je nach Wahl des Zeitreihenmodells sind die Berechnungen unterschiedlich durchzuführen.

11.1.4.1 Multiplikatives Modell:

In der folgenden Tabelle werden die notwendigen Berechnungen für das multiplikative Modell aufgeführt. Anschliessend werden auch noch in zwei grafischen Darstellungen die saisonbereinigten Zeitreihenwerte und die darauf aufbauende Regressions- bzw. Trendgerade, die saisonalisierte Trendgerade und die saisonalisierte Prognose sowie die Saisonfaktoren und 'irregulären' Residualkomponenten visualisiert.

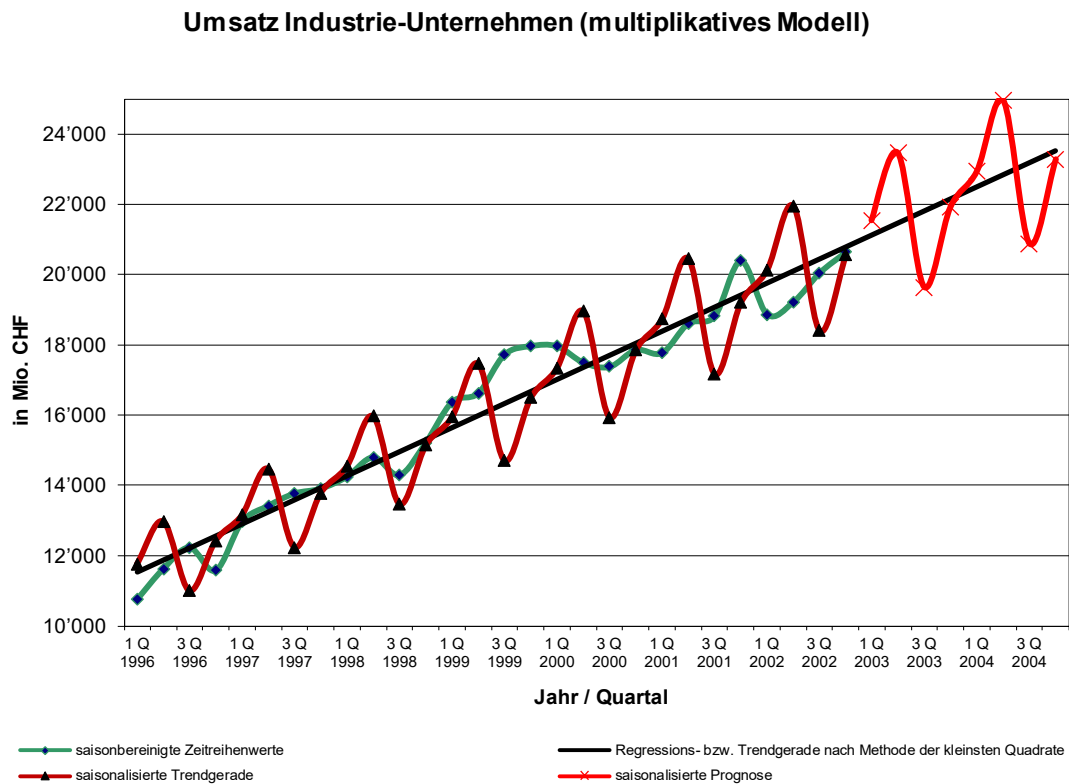
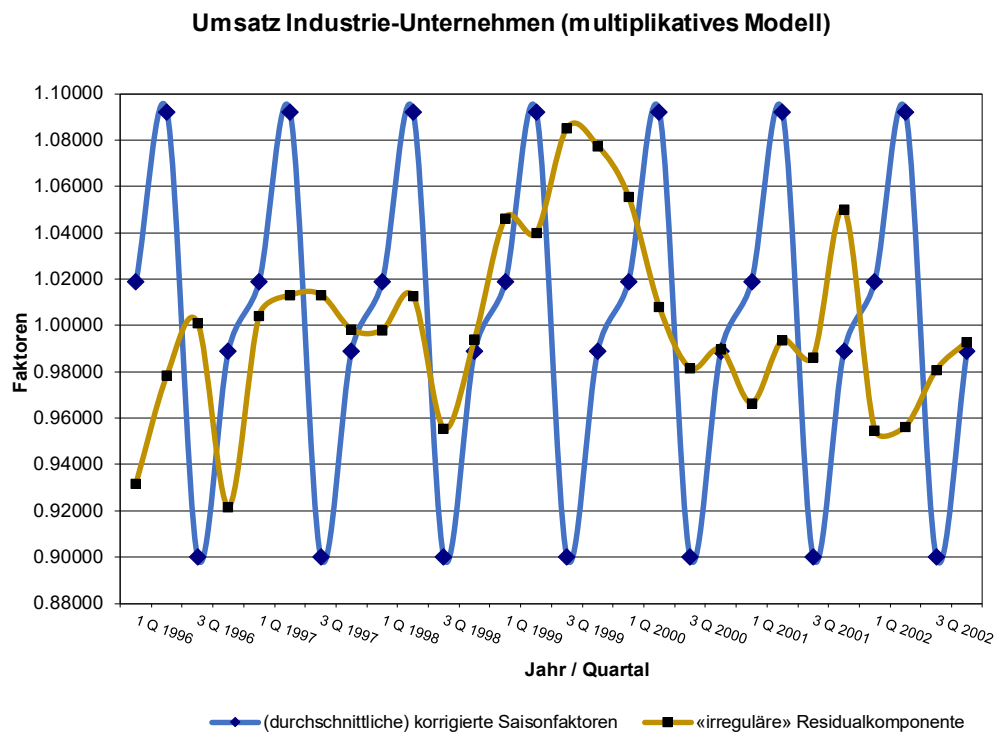
Abb. 96: Tabelle Berechnungen multiplikatives Zeitreihen-Modell

multiplikatives Modell			«zentrierten» gleitender Quartals- Durchschnitt	Saison- faktoren	(durchschnittliche) korrigierte Saison- faktoren	saison- bereinigte Umsätze	Regressions- bzw. Trend- gerade nach kl. Quadrate	«irreguläre» Residual- komponente	saisonalisierte Trend- gerade	saisonalisierte Prognose
Jahr	Quartal	Umsatz in Mio. CHF (a)	(b)	(c) = (a) / (b)	(d) = $\bar{\sigma}$ (c)	(e) = (a) / (d)	(f) = lin. Reg. von (e)	(g) = (a) / (d) / (f)	(h) = (f) · (d)	(i) = (f) · (d)
1996	QI	10'954			1.01890	10'750.77	11'538.74	0.93171	11'756.86	
1996	QII	12'694			1.09213	11'623.17	11'881.38	0.97827	12'975.99	
1996	QIII	11'012	11'810.25	0.93241	0.90000	12'235.51	12'224.01	1.00094	11'001.66	
1996	QIV	11'454	12'337.50	0.92839	0.98896	11'581.82	12'566.65	0.92163	12'427.97	
1997	QI	13'208	12'756.00	1.03543	1.01890	12'962.95	12'909.29	1.00416	13'153.32	
1997	QII	14'658	13'217.00	1.10903	1.09213	13'421.49	13'251.93	1.01280	14'472.81	
1997	QIII	12'396	13'669.00	0.90687	0.90000	13'773.28	13'594.56	1.01315	12'235.16	
1997	QIV	13'758	14'021.75	0.98119	0.98896	13'911.53	13'937.20	0.99816	13'783.39	
1998	QI	14'520	14'269.50	1.01755	1.01890	14'250.61	14'279.84	0.99795	14'549.78	
1998	QII	16'168	14'489.75	1.11582	1.09213	14'804.11	14'622.48	1.01242	15'969.63	
1998	QIII	12'868	14'921.50	0.86238	0.90000	14'297.72	14'965.12	0.95540	13'468.66	
1998	QIV	15'048	15'441.00	0.97455	0.98896	15'215.92	15'307.75	0.99400	15'138.82	
1999	QI	16'684	16'075.50	1.03785	1.01890	16'374.46	15'650.39	1.04627	15'946.24	
1999	QII	18'160	16'801.25	1.08087	1.09213	16'628.08	15'993.03	1.03971	17'466.45	
1999	QIII	15'952	17'344.00	0.91974	0.90000	17'724.37	16'335.67	1.08501	14'702.16	
1999	QIV	17'770	17'665.50	1.00592	0.98896	17'968.30	16'678.31	1.07735	16'494.24	
2000	QI	18'304	17'745.50	1.03147	1.01890	17'964.41	17'020.94	1.05543	17'342.70	
2000	QII	19'112	17'693.00	1.08020	1.09213	17'499.77	17'363.58	1.00784	18'963.27	
2000	QIII	15'640	17'655.25	0.88586	0.90000	17'377.71	17'706.22	0.98145	15'935.66	
2000	QIV	17'662	17'783.00	0.99320	0.98896	17'859.09	18'048.86	0.98949	17'849.67	
2001	QI	18'110	18'096.75	1.00073	1.01890	17'774.01	18'391.50	0.96643	18'739.16	
2001	QII	20'328	18'571.25	1.09460	1.09213	18'613.19	18'734.13	0.99354	20'460.09	
2001	QIII	16'934	19'023.25	0.89017	0.90000	18'815.48	19'076.77	0.98630	17'169.16	
2001	QIV	20'164	19'246.00	1.04770	0.98896	20'389.01	19'419.41	1.04993	19'205.10	
2002	QI	19'224	19'468.50	0.98744	1.01890	18'867.34	19'762.05	0.95473	20'135.62	
2002	QII	20'996	19'638.75	1.06911	1.09213	19'224.84	20'104.69	0.95624	21'956.91	
2002	QIII	18'046			0.90000	20'051.03	20'447.32	0.98062	18'402.67	
2002	QIV	20'414			0.98896	20'641.80	20'789.96	0.99287	20'560.52	
2003	QI				1.01890		21'132.60			21'532.08
2003	QII				1.09213		21'475.24			23'453.72
2003	QIII				0.90000		21'817.87			19'636.17
2003	QIV				0.98896		22'160.51			21'915.95
2004	QI				1.01890		22'503.15			22'928.54
2004	QII				1.09213		22'845.79			24'950.54
2004	QIII				0.90000		23'188.43			20'869.67
2004	QIV				0.98896		23'531.06			23'271.38

Abb. 97: Tabelle Berechnung Saisonfaktoren bei multiplikativem Zeitreihen-Modell

Berechnung der (durchschnittlichen) korrigierten Saisonfaktoren (multiplikatives Modell)

Jahr	Quartale			
	QI	QII	QIII	QIV
1996			0.93241	0.92839
1997	1.03543	1.10903	0.90687	0.98119
1998	1.01755	1.11582	0.86238	0.97455
1999	1.03785	1.08087	0.91974	1.00592
2000	1.03147	1.08020	0.88586	0.99320
2001	1.00073	1.09460	0.89017	1.04770
2002	0.98744	1.06911		
$\bar{\sigma}$	1.01841	1.09160	0.89957	0.98849
Summe		3.99808		
Korrektur- faktor	1.00048005	1.00048005	1.00048005	1.00048005
korrigierte Saisonfaktoren	1.01890	1.09213	0.90000	0.98896
Summe		4.00000		

Abb. 98: Saisonalisierte Trendgerade und Prognose bei multiplikativem Zeitreihen-Modell**Abb. 99: Saisonfaktoren und Residualkomponenten bei multiplikativem Zeitreihen-Modell**

11.1.4.2 Additives Modell:

In der folgenden Tabelle werden die notwendigen Berechnungen für das additive Modell aufgeführt. Anschliessend werden auch noch in zwei grafischen Darstellungen die saisonbereinigten Zeitreihenwerte und die darauf aufbauende Regressions- bzw. Trendgerade, die saisonalisierte Trendgerade und die saisonalisierte Prognose sowie die Saisonfaktoren und 'irregulären' Residualkomponenten visualisiert.

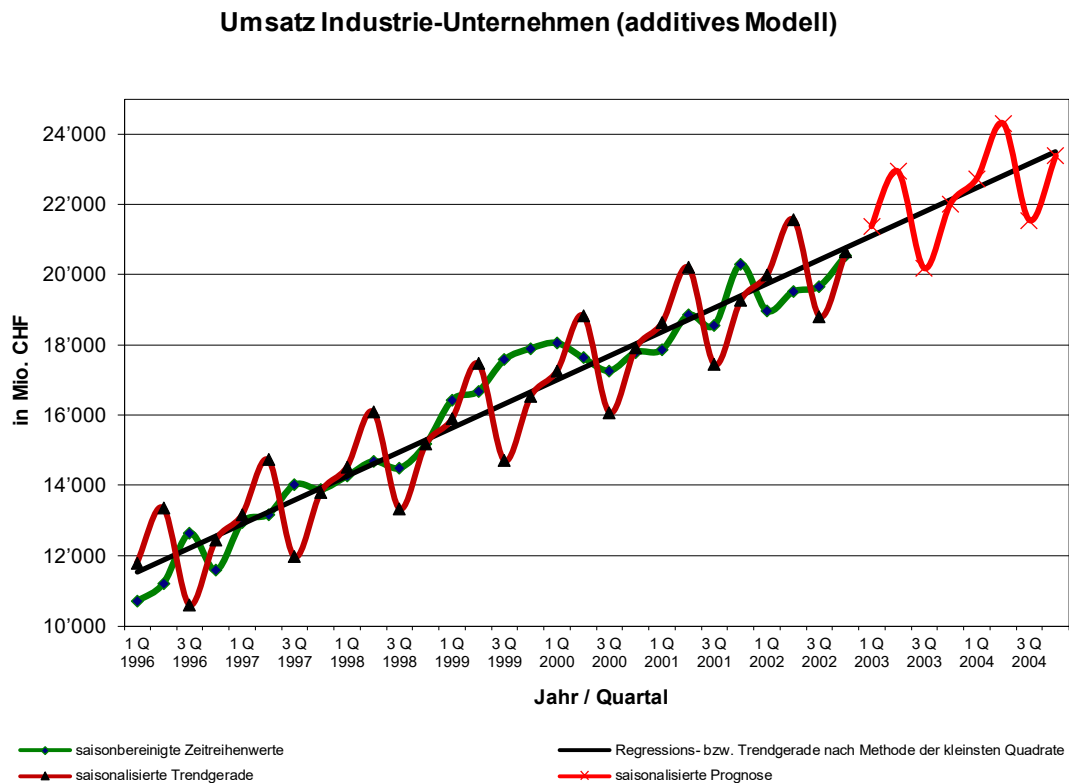
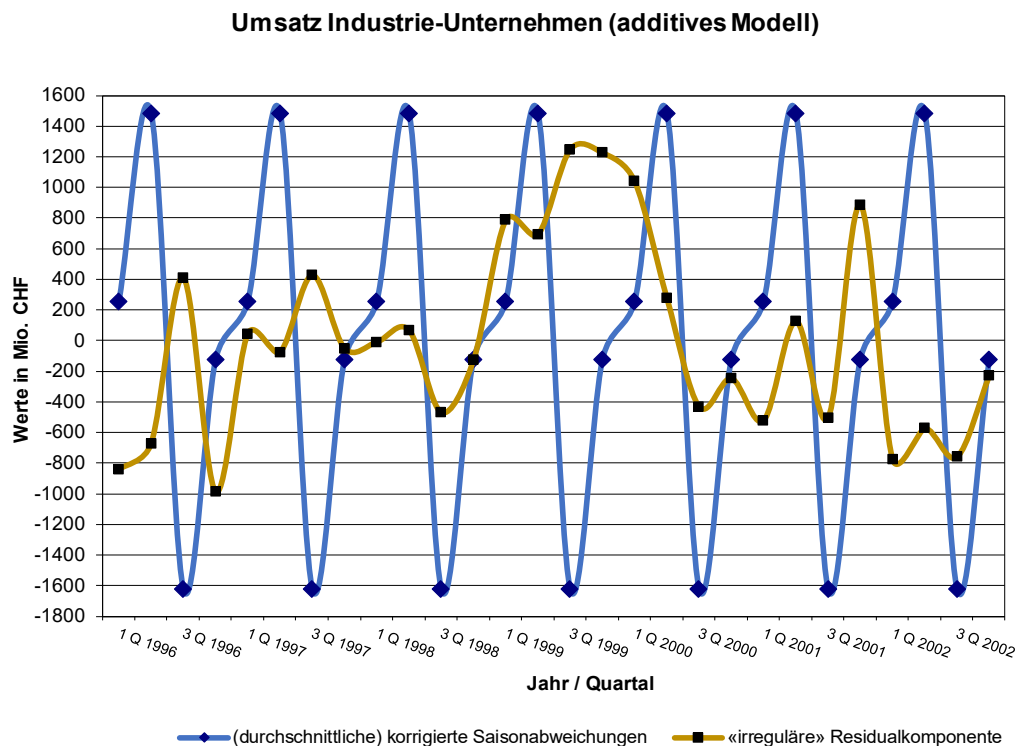
Abb. 100: Tabelle Berechnungen Additives Zeitreihen-Modell

additives Modell			'zentrierter' gleitender Quartals- Durchschnitt	Saison- abweichungen	(durchschnittliche) korrigierte Saison- abweichungen	saison- bereinigte Umsätze	Regressions- bzw. Trend- gerade nach kl. Quadrate	«irreguläre» Residual- komponente	saisonalisierte Trend- gerade	saisonalisierte Prognose
Jahr	Quartal	Umsatz in Mio. CHF (a)	(b)	(c) = (a) - (b)	(d) = $\bar{\sigma}$ (c)	(e) = (a) - (d)	(f) = lin. Reg. von (e)	(g) = (a) - (d) - (f)	(h) = (f) + (d)	(i) = (f) + (d)
1996	QI	10'954			256.823	10'697.18	11'536.87	-839.69	11'793.69	
1996	QII	12'694			1'485.615	11'208.39	11'878.68	-670.29	13'364.29	
1996	QIII	11'012	11'810.25	-798.250	-1'619.760	12'631.76	12'220.49	411.27	10'600.73	
1996	QIV	11'454	12'337.50	-883.500	-122.677	11'576.68	12'562.31	-985.63	12'439.63	
1997	QI	13'208	12'756.00	452.000	256.823	12'951.18	12'904.12	47.05	13'160.95	
1997	QII	14'658	13'217.00	1'441.000	1'485.615	13'172.39	13'245.94	-73.55	14'731.55	
1997	QIII	12'396	13'669.00	-1'273.000	-1'619.760	14'015.76	13'587.75	428.01	11'967.99	
1997	QIV	13'758	14'021.75	-263.750	-122.677	13'880.68	13'929.56	-48.89	13'806.89	
1998	QI	14'520	14'269.50	250.500	256.823	14'263.18	14'271.38	-8.20	14'528.20	
1998	QII	16'168	14'489.75	1'678.250	1'485.615	14'682.39	14'613.19	69.19	16'098.81	
1998	QIII	12'868	14'921.50	-2'053.500	-1'619.760	14'487.76	14'955.01	-467.25	13'335.25	
1998	QIV	15'048	15'441.00	-393.000	-122.677	15'170.68	15'296.82	-126.14	15'174.14	
1999	QI	16'684	16'075.50	608.500	256.823	16'427.18	15'638.64	788.54	15'895.46	
1999	QII	18'160	16'801.25	1'358.750	1'485.615	16'674.39	15'980.45	693.94	17'466.06	
1999	QIII	15'952	17'344.00	-1'392.000	-1'619.760	17'571.76	16'322.26	1'249.50	14'702.50	
1999	QIV	17'770	17'665.50	104.500	-122.677	17'892.68	16'664.08	1'228.60	16'541.40	
2000	QI	18'304	17'745.50	558.500	256.823	18'047.18	17'005.89	1'041.28	17'262.72	
2000	QII	19'112	17'693.00	1'419.000	1'485.615	17'626.39	17'347.71	278.68	18'833.32	
2000	QIII	15'640	17'655.25	-2'015.250	-1'619.760	17'259.76	17'689.52	-429.76	16'069.76	
2000	QIV	17'662	17'783.00	-121.000	-122.677	17'784.68	18'031.34	-246.66	17'908.66	
2001	QI	18'110	18'096.75	13.250	256.823	17'853.18	18'373.15	-519.97	18'629.97	
2001	QII	20'328	18'571.25	1'756.750	1'485.615	18'842.39	18'714.96	127.42	20'200.58	
2001	QIII	16'934	19'023.25	-2'089.250	-1'619.760	18'553.76	19'056.78	-503.02	17'437.02	
2001	QIV	20'164	19'246.00	918.000	-122.677	20'286.68	19'398.59	888.08	19'275.92	
2002	QI	19'224	19'468.50	-244.500	256.823	18'967.18	19'740.41	-773.23	19'997.23	
2002	QII	20'996	19'638.75	1'357.250	1'485.615	19'510.39	20'082.22	-571.84	21'567.84	
2002	QIII	18'046			-1'619.760	19'665.76	20'424.03	-758.27	18'804.27	
2002	QIV	20'414			-122.677	20'536.68	20'765.85	-229.17	20'643.17	
2003	QI				256.823		21'107.66			21'364.49
2003	QII				1'485.615		21'449.48			22'935.09
2003	QIII				-1'619.760		21'791.29			20'171.53
2003	QIV				-122.677		22'133.11			22'010.43
2004	QI				256.823		22'474.92			22'731.74
2004	QII				1'485.615		22'816.73			24'302.35
2004	QIII				-1'619.760		23'158.55			21'538.79
2004	QIV				-122.677		23'500.36			23'377.69

Abb. 101: Tabelle Berechnung Saisonabweichungen Additives Zeitreihen-Modell

Berechnung der (durchschnittlichen) korrigierten Saisonabweichungen (additives Modell)

Jahr	Quartale			
	QI	QII	QIII	QIV
1996			-798.250	-883.500
1997	452.000	1'441.000	-1'273.000	-263.750
1998	250.500	1'678.250	-2'053.500	-393.000
1999	608.500	1'358.750	-1'392.000	104.500
2000	558.500	1'419.000	-2'015.250	-121.000
2001	13.250	1'756.750	-2'089.250	918.000
2002	-244.500	1'357.250		
$\bar{\sigma}$	273.042	1'501.833	-1'603.542	-106.458
Summe		64.875		
Korrekturwert	-16.219	-16.219	-16.219	-16.219
korrigierte Saisonabw.	256.823	1'485.615	-1'619.760	-122.677
Summe		0.000		

Abb. 102: Saisonalisierte Trendgerade und Prognose Additives Zeitreihen-Modell**Abb. 103: Saisonabweichungen und Residualkomponente Additives Zeitreihen-Modell**

Beide Zeitreihenmodelle unterscheiden sich im Endresultat, d.h. bezüglich der saisonalisierten Prognose, nicht sehr stark. Beide Modelle zeigen aber in der grafischen Darstellung der 'irregulären' Residualkomponente sehr deutlich, dass diese nicht rein zufällig ist bzw. der Charakteristik eines 'weissen Rauschens' entspricht. Insbesondere in der Zeit zwischen dem 1. Quartal 1999 bis 3. Quartal 2000 ist eine 'systematische' Abweichung nach oben feststellbar. Dies ist klar ein Indiz, dass bei der vorgenommenen Zeitreihenzerlegung nicht alle Komponenten, welche die Zeitreihe beeinflussen, erfasst wurden. Die Komponente, welche bei der 'klassischen' Zeitreihenzerlegung nicht bestimmt werden kann, ist die zyklische Komponente, d.h. die überjährigen allmählichen, durch die Konjunkturlage ausgelösten Auf- und Abschwünge.

11.2 Weitere Zeitreihenanalyse-Modelle

Bei der Verwendung der linearen Regressionsfunktion für Prognosezwecke wird modell-theoretisch unterstellt bzw. angenommen, dass **kein** Zusammenhang unter den beobachteten Werten besteht, bzw. die Residuen keine Korrelation aufweisen oder visuell ausgedrückt, dass sich die beobachteten Werte rein zufällig mal über und mal unter der geschätzten Regressionsgeraden befinden. Falls dies aber nicht zutrifft, besteht eine sogenannte Autokorrelation (siehe Kapitel 10.6.4). In diesem Fall ist es nicht angezeigt bzw. modell-theoretisch nicht richtig, eine lineare Regressionsfunktion für Prognosezwecke zu verwenden.

Bei Zeitreihenanalysen kommt die Autokorrelation in der Praxis sehr häufig vor. Aus diesem Grund wurden 'Modelle' kreiert, die diese Abhängigkeit mitberücksichtigen: nämlich 'Exponentielles Glätten' und 'ARIMA-Box-Jenkins-Modell'.

11.2.1 Exponentielles Glätten²⁷⁰

Bei der sogenannten 'naiven' Prognose wird nach dem Motto 'alles bleibt wie es ist' der letzte beobachtete Zeitreihenwert (Y_t) als Prognosewert (F_{t+1}) verwendet, bei einem anderen Prognoseverfahren z.B. das arithmetische Mittel aller beobachteten Zeitreihenwerte.

Da beide Methoden nicht befriedigen, wird **mit der Methode des exponentiellen Glättens²⁷¹, ein Mittelweg** eingeschlagen.

11.2.1.1 Verbale Umschreibung

"Exponentielles Glätten ist ein Verfahren, das bei autokorrelierten Zeitreihen, d.h. bei Werten einer Zeitreihe die mit den (zeitlich) nachfolgenden Zeitreihenwerten einen Zusammenhang aufweisen, zufällige Schwankungen bzw. Störungen entfernt, um aufgrund der geglätteten Reihe bessere Aussagen über deren Verlauf machen zu können." ²⁷² Das Modell ist so aufgebaut, dass dem letzten Zeitreihenwert das höchste Gewicht gegeben wird und den weiter zurückliegenden Zeitreihenwerten ein exponentiell abnehmendes Gewicht. Wie stark die relative Gewichtung (im Verhältnis zum Durchschnitt aller beobachteter Zeitreihenwerte) zu erfolgen hat, wird mit dem sogenannten **Glättungsparameter** gesteuert, der sich zwischen Eins und Null bewegen kann. Dabei wird bei einem Glättungsparameter von Eins nur die jüngste Beobachtung einbezogen, bei einem solchen von Null, alle vorhergehenden Werte.

In der folgenden Darstellung soll die Gewichtung der beobachteten Zeitreihenwerte für die Bestimmung des Prognosewerts (F_{t+1}) aufgrund verschiedener Glättungsparameter 'Alpha' bzw. ' α ' aufgezeichnet werden: Dabei wird unterstellt, dass es eine unendliche Zahl von beobachteten Zeitreihenwerten gibt, und somit keine 'Gewichtungskorrektur' zur Erreichung der relativen Gewichtung notwendig ist.

²⁷⁰ Diese Methode kann z.B. in der folgenden Literatur im Detail nachgelesen werden: BOHLEY, ⁶1996, S. 286ff., BÜHL, ZÖFEL, 1996, S. 214ff., MAKRIDAKIS, WHEELWRIGHT, HYNDMAN, ³1998, S. 135 ff. und SPSS Trends 10.0, 1999, S. 21ff.

²⁷¹ exponential smoothing

²⁷² BÜHL, ZÖFEL, 1996, S. 214.

Abb. 104: Tabelle Gewichtung beobachtete Zeitreihenwerte, abweichende Glättungsparameter

Gewichtung der beobachteten Zeitreihenwerte	bei Glättungsparameter 'Alpha' von ...					
	0.1	0.2	0.4	0.6	0.8	0.9
Y_t	0.100000	0.200000	0.400000	0.600000	0.800000	0.900000
Y_{t-1}	0.090000	0.160000	0.240000	0.240000	0.160000	0.090000
Y_{t-2}	0.081000	0.128000	0.144000	0.096000	0.032000	0.009000
Y_{t-3}	0.072900	0.102400	0.086400	0.038400	0.006400	0.000900
Y_{t-4}	0.065610	0.081920	0.051840	0.015360	0.001280	0.000090
Y_{t-100}	0.000003	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000

Es gibt verschiedene Modelle des exponentiellen Glättens:

- einfaches Modell: Zeitreihe ohne Trendkomponente und ohne saisonale Komponente (mit dem allgemeinen Glättungsparameter 'Alpha').
- Modell nach Holt: Zeitreihe mit linearem Trend, aber ohne saisonale Komponente (mit dem allgemeinen Glättungsparameter 'Alpha' und dem Glättungsparameter 'Gamma' für den Trend). "Im Unterschied zur Feststellung der Trendparameter beim Regressionsverfahren, bei dem alle Zeitreihenwerte gleiches Gewicht haben, werden jetzt den Zeitreihenwerten in Richtung Vergangenheit abnehmende Gewichte gegeben."²⁷³
- Modell nach Holt-Winters: Zeitreihe mit linearem Trend und multiplikativer saisonaler Komponente (mit dem allgemeinen Glättungsparameter 'Alpha', dem Glättungsparameter 'Gamma' für den Trend und dem Glättungsparameter 'Delta' für die saisonale Komponente).
- Weitere Modelle: Bezüglich Trend und Saisonkomponente abgeänderte Kombinationen des Holt-Winters' Modells (z.B. exponentieller Trend, additive saisonale Komponente usw.).

Die grössten Schwierigkeiten bei der Bestimmung des geeigneten Modells entstehen bei der Wahl der Anfangswerte²⁷⁴ und bei der Festlegung der Glättungsparameter. Moderne Statistik-Software-Pakete ermöglichen dies durch iteratives Durchrechnen mehrerer Varianten mit z.B. der Zielgrösse: Minimierung der Quadratsumme der Residuenabweichungen (SSE) (siehe auch Kapitel 10.3.3). Die Residuenabweichung bzw. der Fehler ermittelt sich aus dem beobachteten Zeitreihenwert minus dem dazugehörig berechneten Prognosewert des Modells (in den folgenden Beispielen als 'Fehlervariable' bezeichnet).

Diese eher formal-mathematische Methode untersucht nicht die Strukturen oder Gesetzmässigkeiten der Zeitreihenwerte und ist deshalb eher für kurzfristige Prognosen geeignet (z.B. zur Schätzung des Lagerbestandes in der nächsten Periode)

²⁷³ BOHLEY, ⁶1996, S.289.

²⁷⁴ initial values

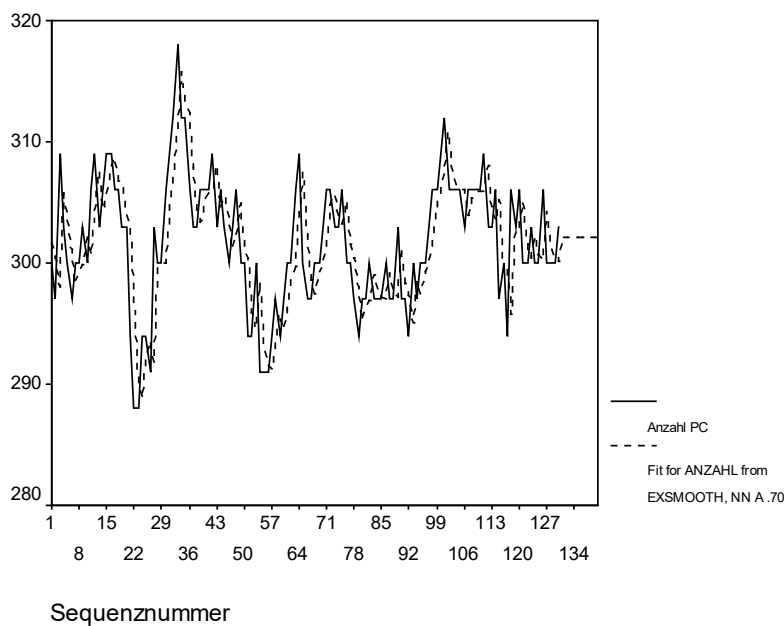
11.2.1.2 Drei Beispiele des exponentiellen Glättens

Folgende drei exponentielle Glättungs-Berechnungen²⁷⁵ wurden mit dem Statistik-Software-Paket 'SPSS für Windows' erstellt.

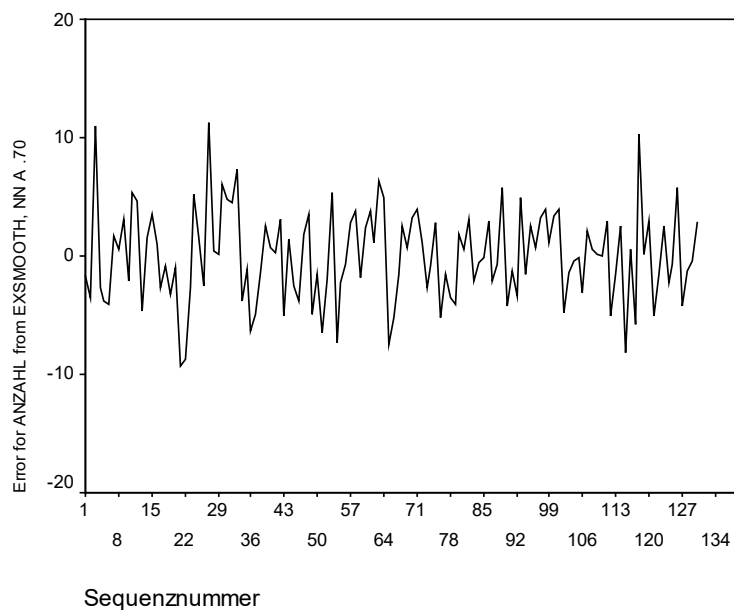
einfaches Modell mit Alpha = 0.7

Die tägliche Produktion eines bestimmten Personal-Computer-Typs über einen Zeitraum von 26 Wochen zu je 5 Arbeitstagen sei bekannt und werde nach oben erwähntem Modell 'exponentiell geglättet':

Abb. 105: Exponentielles Glätten, einfaches Modell



Zur visuellen Kontrolle bezüglich 'Güte' des gewählten Modells, wird der Verlauf der 'Fehlervariablen' dargestellt. Darin sollte keinerlei Muster erkennbar sein.

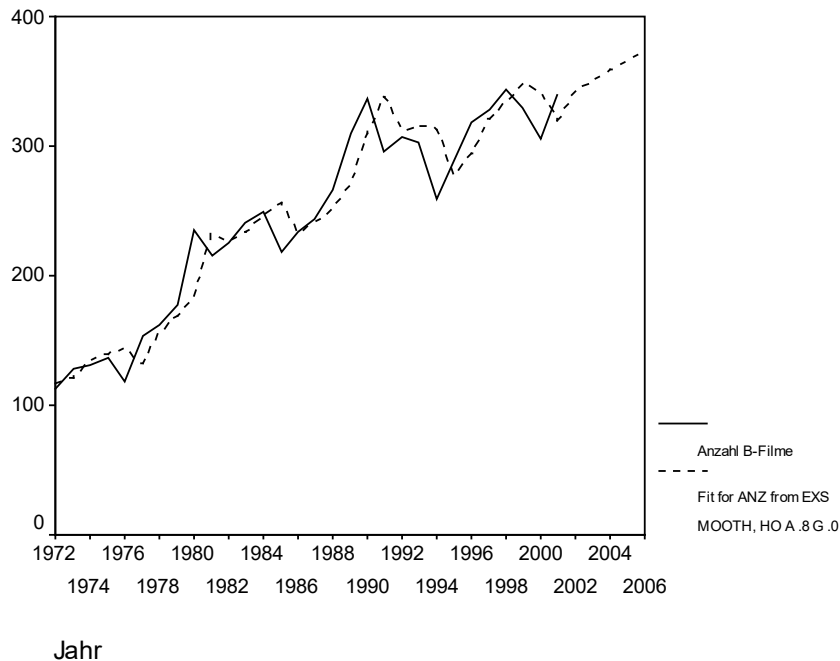


²⁷⁵ siehe auch BÜHL, ZÖFEL, 1996, S. 214ff.

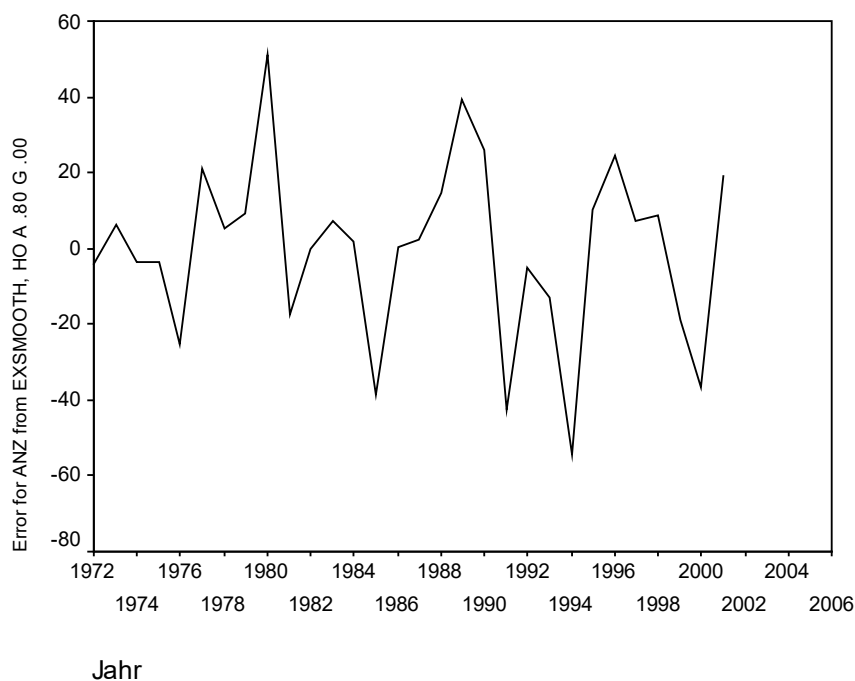
Modell nach Holt (linearere Trendkomponente) mit $\alpha = 0.8$ und $\gamma = 0.0$

Die jährliche Anzahl neu erscheinender B-Filme in den Jahren 1972 bis 2001 sei bekannt und werde nach oben erwähntem Modell 'exponentiell geglättet':

Abb. 106: Exponentielles Glätten, Modell nach Holt



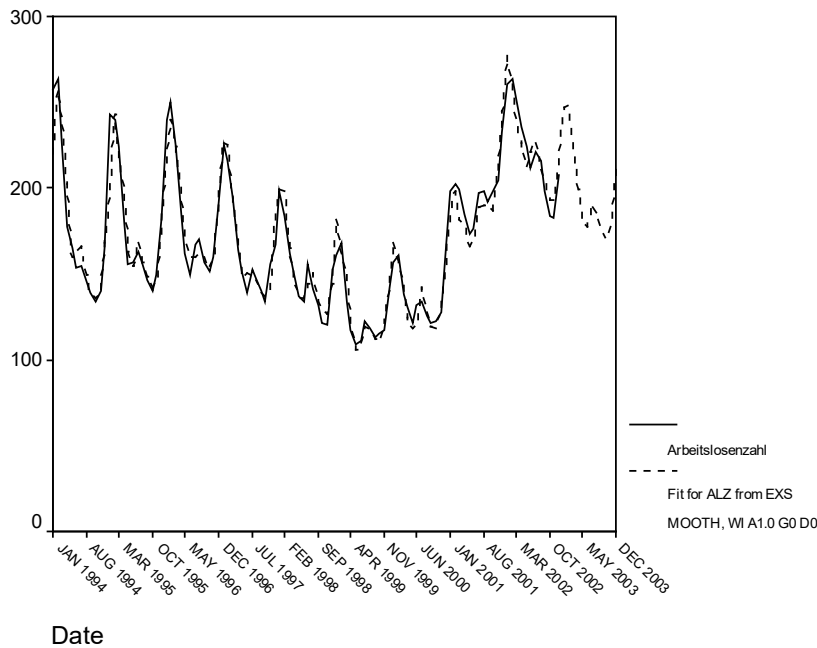
Auch hier wird der Verlauf der 'Fehlervariablen' zur visuellen Kontrolle bezüglich 'Güte' des gewählten Modells dargestellt. Darin sollte wiederum keinerlei Muster erkennbar sein.



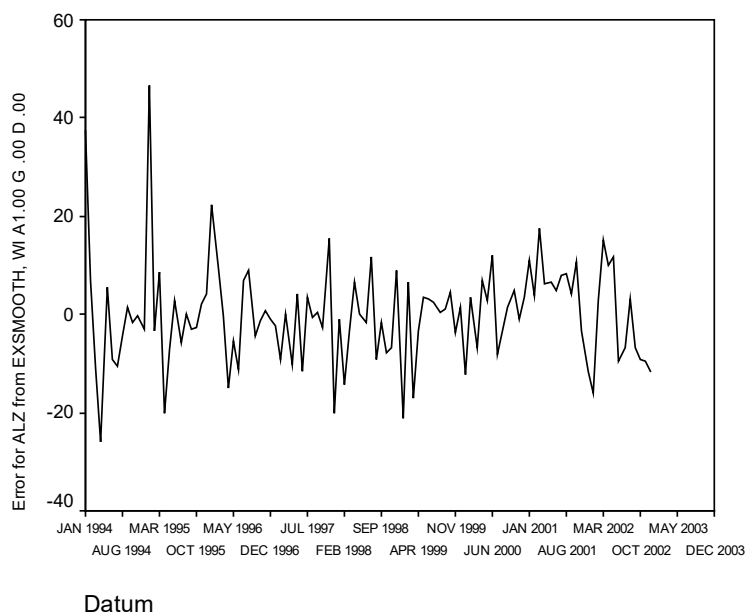
Modell nach Holt-Winters (lineare Trendkomponente, multiplikative Saisonkomponente) mit $\alpha = 1.0$, $\gamma = 0.0$ und $\delta = 0.0$

Die monatliche Entwicklung der Arbeitslosenzahl in einer Stadt von Januar 1994 bis Dezember 2002 sei bekannt und werde nach oben erwähntem Modell 'exponentiell geglättet':

Abb. 107: Exponentielles Glätten, Modell nach Holt-Winters



Auch hier wird der Verlauf der 'Fehlervariablen' zur visuellen Kontrolle bezüglich 'Güte' des gewählten Modells dargestellt. Darin sollte wiederum keinerlei Muster erkennbar sein.



11.2.2 ARIMA-Box-Jenkins-Modell

Der **ARIMA-Ansatz** geht auf die Herren **Box und Jenkins** zurück und berücksichtigt insgesamt **drei verschiedene Komponenten**; dementsprechend steht ARIMA für 'AR' (Autoregressive) 'I' (Integrated) 'MA' (Moving Average).

11.2.2.1 Verbale Umschreibung

Ein **ARIMA-Modell**²⁷⁶ wird mit **drei kleinen ganzen Zahlen 'p', 'd' und 'q'** beschrieben, wobei 'p' den Grad der Autoregression, 'd' den Grad der Differenzierung und 'q' die Ordnung des gleitenden Durchschnitts bedeuten. Ein Modell wird daher als ARIMA (p,d,q) bezeichnet, z.B. ARIMA (0,0,1) oder ARIMA (1,1,1). Grössere Zahlen als 1 treten gewöhnlich nicht auf.

- Die erste der drei Komponenten, d.h. die autoregressive Komponente 'p', **erklärt jeden Wert als Funktion seiner Vorgänger**; bei einem autoregressiven Prozess erster Ordnung (auch 'AR(1)' genannt) mit 'p = 1' wird ein Wert unter Berücksichtigung einer Störung allein aus dem unmittelbar vorhergehenden Wert erklärt. Ein Modell mit einer autoregressiven Komponente erster Ordnung, aber ohne die Komponenten der Differenzierung und des gleitenden Durchschnitts wird mit ARIMA (1,0,0) bezeichnet.
- Die zweite Komponente, d.h. der Grad der Differenzierung 'd', **ist der Grad der Differenzenbildung, der nötig ist, um die betreffende Zeitreihe stationär zu machen**. Eine stationäre Reihe ist eine solche, deren Mittelwert und Streuung um ein konstantes Niveau schwanken. Bei stationären Zeitreihen ist 'd = 0', bei Zeitreihen, die durch Differenzenbildung zum jeweils vorhergehenden Wert stationär werden, ist 'd = 1'. Müssen Differenzen der Differenzen gebildet werden, wird 'd = 2' usw. Ein Modell mit Differenzierungsgrad '1', aber ohne die Komponenten der Autoregression und des gleitenden Durchschnitts, wird mit 'I(1)' oder ARIMA (0,1,0) bezeichnet.
- Die dritte Komponente, d.h. die Ordnung des gleitenden Durchschnitts²⁷⁷ 'q', **hat ihre Ursache in der Störung bei den 'q' vorhergehenden Werten; eine Störung von mehr als 'q' Zeitpunkten hat demnach keinen Einfluss mehr**. Ein Modell mit 'q = 1', aber ohne die Komponenten der Autoregression und der Differenzenbildung, wird mit 'MA(1)' oder ARIMA (0,0,1) bezeichnet.²⁷⁸

In der Praxis kommt es eher selten vor, dass ein gut spezifiziertes ARIMA-Modell sowohl eine von Null unterschiedliche autoregressive Komponente als auch eine von Null unterschiedliche Ordnung des gleitenden Durchschnitts aufweist. Die meisten gut spezifizierten ARIMA-Modelle weisen zudem lediglich eine autoregressive Komponente auf.

²⁷⁹Zu den drei Komponenten bei den nichtsaisonalen ARIMA-Modellen kommen bei den saisonalen ARIMA-Modellen drei weitere entsprechende Komponenten hinzu; die saisonale autoregressive Komponente, der saisonale Grad der Differenzierung und die saisonale Ordnung des gleitenden Durchschnitts.

Dies führt dazu, dass zu den nichtsaisonalen Modellparameter 'p', 'd' und 'q' noch die saisonalen Modellparameter 'sp', 'sd' und 'sq' hinzukommen und ebenfalls vor der Durchrechnung des Modells zu identifizieren sind.

²⁷⁶ Diese Methode kann z.B. in der folgenden Literatur im Detail nachgelesen werden: BOX, JENKINS, REINSELL, ³1994., MAKRIDAKIS, WHEELWRIGHT, HYNDMAN, ³1998, S. 311ff. und SPSS Trends 10.0, 1999, S. 53ff.

²⁷⁷ moving-average

²⁷⁸ vorstehende Ausführungen sind weitgehend BÜHL, ZÖFEL, 1996, S. 228. entnommen

²⁷⁹ nachstehende Ausführungen sind weitgehend BÜHL, ZÖFEL, 1996, S. 235. entnommen

Ein saisonales ARIMA-Modell kann nur dann gerechnet werden, wenn über die Zeitreihe eine Periodizität (z.B. Quartale 'P = 4' oder Monate 'P = 12') sinnvoll vorgegeben werden kann. Bezeichnet man diese mit 'P', so lautet die Bezeichnung eines kompletten ARIMA-Modells mit saisonaler und nichtsaisonaler Komponente wie folgt:

$$\text{ARIMA}(p,d,q)(sp, sd, sq)P$$

Zur Bestimmung der Komponenten der drei Prozesse (AR, I und MA) sind komplexe mathematische Techniken notwendig, die nur mit Hilfe eines Statistik-Software-Paketes effizient gelöst werden können. **Das Modell ist sehr 'ausgeklügelt' und wird häufig bei statistischen Auswertungen der Qualitätskontrolle angewendet und bei fast allen (volks- und betriebswirtschaftlichen) Prognosen.**

11.2.2.2 Einige Grundbegriffe zum ARIMA-Modell

Stationäre Zeitreihenwerte

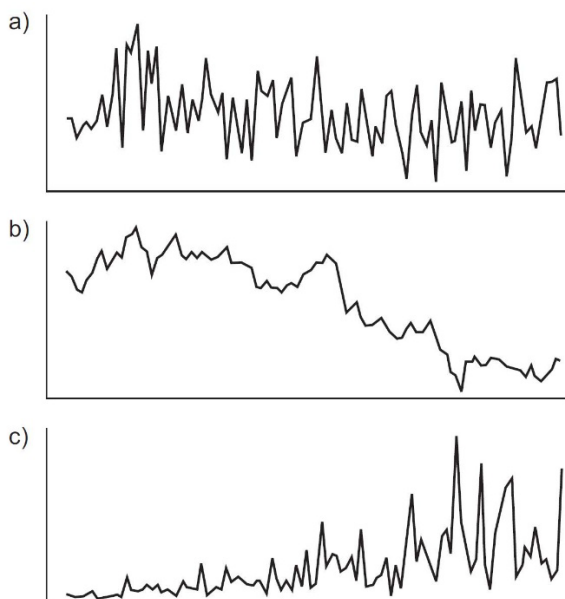
Der Begriff stationär bedeutet, dass die Zeitreihenwerte weder Wachstum noch Rückgang aufweisen; d.h. in Bezug auf die Zeitachse müssen die Zeitreihenwerte mehr oder weniger horizontal verlaufen. **Sie schwanken also - unabhängig der Zeitachse - um ein konstantes Niveau bzw. einen konstanten Durchschnitt. Zudem bleiben die Schwankungen bzw. Streuung der Zeitreihenwerte mehr oder weniger konstant.**

Das Vorhandensein stationärer Zeitreihenwerte²⁸⁰ ist deshalb so wichtig, weil sich nur dann die Zeitreihenwerte für ein ARIMA-Modell eignen.

In den folgenden Darstellungen²⁸¹ soll dies verdeutlicht werden:

- zeigt Zeitreihenwerte, die stationär sind
- zeigt Zeitreihenwerte, die nicht stationär sind bezüglich eines konstanten Durchschnittes
- zeigt Zeitreihenwerte, die nicht stationär sind bezüglich eines konstanten Durchschnittes und bezüglich der Schwankungen (Varianz)

Abb. 108: Stationäre und nicht-stationäre Zeitreihenwerte



²⁸⁰ stationary series

²⁸¹ siehe auch MAKRIDAKIS, WHEELWRIGHT, HYNDMAN, ³1998, S. 325.

Autokorrelation bzw. ACF²⁸²

Unter einer Autokorrelation versteht man die Korrelation bzw. den Zusammenhang zwischen den Werten einer Zeitreihe mit ihren nachfolgenden Werten. Das Ausmass der Verzögerung (auch 'Lag' genannt) bestimmt dabei die Ordnung der Autokorrelation; eine Autokorrelation z.B. erster Ordnung ist die Korrelation bzw. der Zusammenhang zwischen den Werten der Zeitreihe mit ihren jeweils unmittelbar nachfolgenden Werten.²⁸³

Liegt ein typisches ARIMA-Modell mit einer autoregressiven Komponente 'p' vor, dann weisen die ACF beim p-ten Lag ihren Höhepunkt auf und sinken exponentiell mit zunehmendem Lag. Liegt hingegen ein typisches ARIMA-Modell mit einer Ordnung des gleitenden Durchschnitts²⁸⁴ 'q' vor, dann weisen die ACF beim q-ten Lag ihren Höhepunkt auf und fallen anschliessend schnell auf Null runter (siehe THEORETISCHE ARIMA-MODELLE UND DEREN ACF- UND PACF-DIAGRAMME, Seite 219)).

Partielle Autokorrelation bzw. PACF²⁸⁵

Die partielle Autokorrelation misst den Zusammenhang zwischen den Werten einer Zeitreihe mit nachfolgenden Werten, wobei die Zusammenhänge der dazwischen liegenden Werte ausgeschaltet werden.

Angenommen es bestehe eine starke Autokorrelation zwischen den Werten Y_t und Y_{t-1} , dann besteht auch eine signifikante Korrelation zwischen den Werten Y_{t-1} und Y_{t-2} , da auch diese beiden Werte einen Zeitwert auseinander liegen. Logischerweise besteht auch eine Korrelation zwischen den Werten Y_t und Y_{t-2} , da beide mit Y_{t-1} in Beziehung stehen. Will man nun die **echte** Korrelation zwischen Y_t und Y_{t-2} messen, müssen alle Einflüsse von Y_{t-1} entfernt werden. Genau dies tut die partielle Autoregression.²⁸⁶

Liegt ein typisches ARIMA-Modell mit einer autoregressiven Komponente 'p' vor, dann weisen die PACF beim p-ten Lag ihren Höhepunkt auf und fallen anschliessend schnell auf Null runter. Liegt hingegen ein typisches ARIMA-Modell mit einer Ordnung des gleitenden Durchschnitts²⁸⁷ 'q' vor, dann weisen die PACF beim q-ten Lag ihren Höhepunkt auf und sinken exponentiell mit zunehmendem Lag (siehe Anhang anschliessend an das folgende Beispiel).

Weisses Rauschen

Jedes gute Prognose-Modell sollte (Vorhersage-)Fehler bzw. Residuenabweichungen aufweisen, die einem weissen Rauschen²⁸⁸ entsprechen, d.h. rein zufällig sind und von Periode zu Periode keinen Zusammenhang aufweisen. Die Residuenabweichung ermittelt sich aus dem beobachteten Zeitreihenwert minus dem dazugehörig berechneten Prognosewert des Modells.

²⁸² auto correlation function

²⁸³ siehe BÜHL, ZÖFEL, 1996, S. 204.

²⁸⁴ moving-average

²⁸⁵ partial auto correlation function

²⁸⁶ siehe MAKRIDAKIS, WHEELWRIGHT, HYNDMAN, ³1998, S. 320.

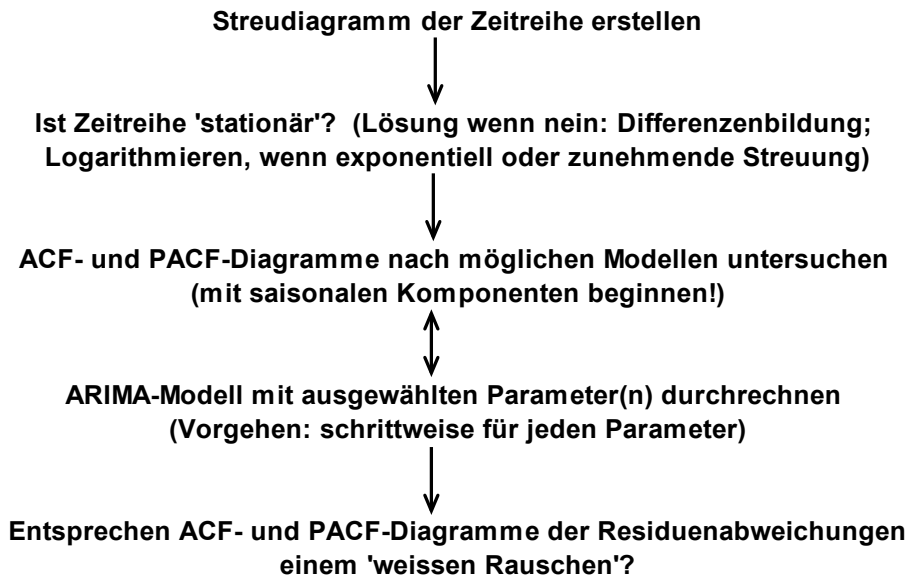
²⁸⁷ moving-average

²⁸⁸ white noise

11.2.2.3 Schematische Vorgehensweise zur Bestimmung der ARIMA-Modell-Parameter

Sowohl für die saisonalen Komponenten, die zuerst zu bestimmen sind, als auch für die nichtsaisonalen Komponenten ist wie im folgenden Schema dargestellt vorzugehen:

Abb. 109: Schematische Vorgehensweise zur Bestimmung der ARIMA-Modell-Parameter



Zur Bestimmung der Parameter der verschiedenen Komponenten eines ARIMA-Modells eignen sich die theoretischen ACF- und PACF-Diagramme (siehe THEORETISCHE ARIMA-MODELLE UND DEREN ACF- UND PACF-DIAGRAMME, Seite 219). Dabei ist zu beachten, dass die ACF und PACF sich nur im Idealfall so klar und eindeutig verhalten. Bei 'echten' Zeitreihen besteht im Normalfall eine gewisse 'Verschmutzung'. Dadurch ist es nicht immer einfach, aufgrund der 'idealtypischen' Darstellungen die ARIMA-Modell-Parameter zu bestimmen. Ein gewisses Mass von subjektiver Einschätzung bleibt bestehen.

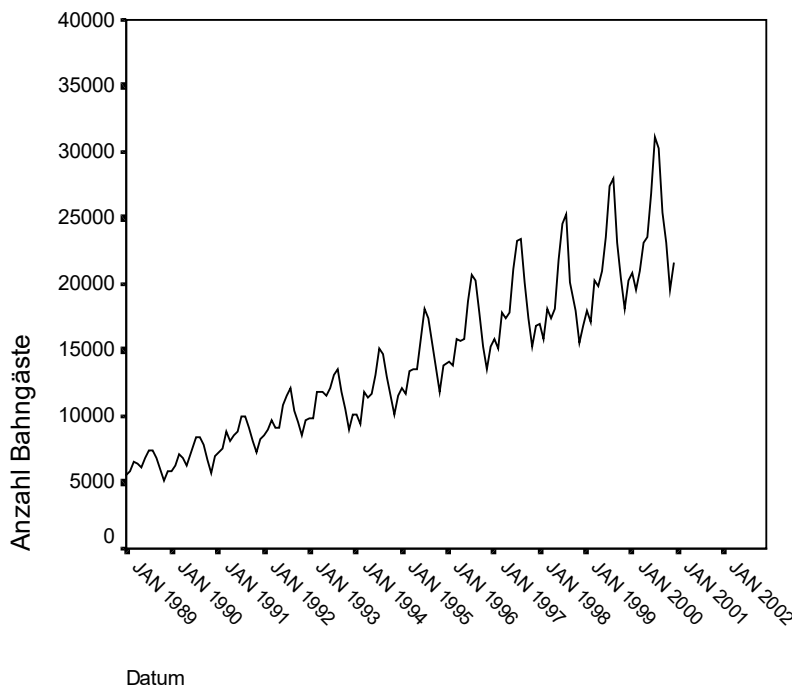
Eine gewisse Hilfe besteht darin, dass normalerweise eine obere und eine untere Konfidenzgrenze (bzw. ein Vertrauensintervall) bei den ACF und PACF-Diagrammen der echten Zeitreihen berechnet bzw. angegeben wird. Liegen die ACF- und PACF-Werte zwischen der oberen und unteren Konfidenzgrenze, können sie für die Bestimmung der ARIMA-Modell-Parameter vernachlässigt werden; liegen die ACF- und PACF-Werte über der oberen bzw. unter der unteren Konfidenzgrenze, sind sie signifikant und sollten für die Bestimmung der ARIMA-Modell-Parameter berücksichtigt werden.

11.2.2.4 Bestimmung der saisonalen und nichtsaisonalen ARIMA-Komponenten anhand eines Beispiels

Die oben aufgeführte, relativ 'trockene' Vorgehensweise soll anhand eines voll durchgezogenen Beispiels²⁸⁹ visualisiert werden.

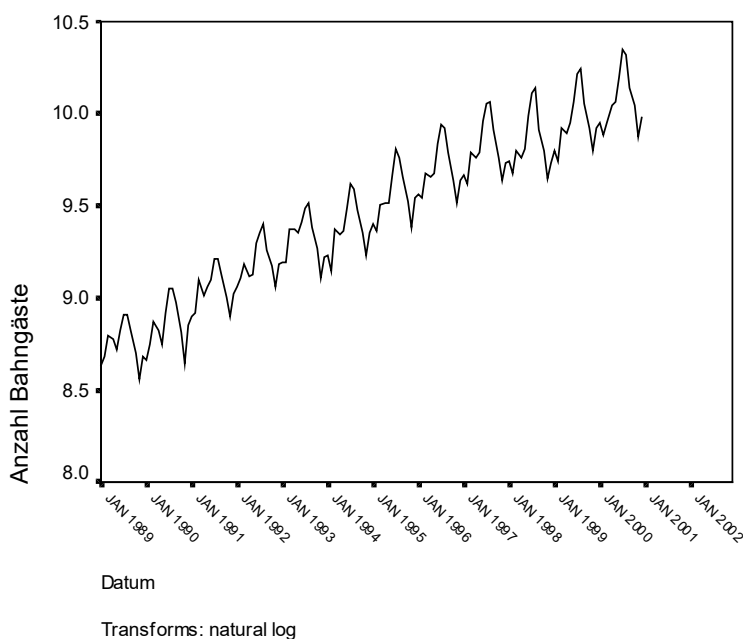
Im untenstehenden Diagramm sind die monatliche Anzahl Bahngäste von 1989 bis 2000 einer Eisenbahngesellschaft aufgezeichnet.

²⁸⁹ siehe auch BÜHL, ZÖFEL, 1996, S. 236 ff. Für die Berechnungen und grafischen Darstellungen wurde das Statistik-Software-Paketes 'SPSS for Windows' mit dem Modul 'Trends' verwendet.

Abb. 110: Monatliche Anzahl Bahngäste von 1989 bis 2000 einer Eisenbahngesellschaft

Die Zeitreihe der Anzahl Bahngäste weist eine deutliche saisonale Komponente auf und ist nicht stationär, da sowohl das Niveau der Zeitreihe leicht exponentiell ansteigt und auch die Streuung im Zeitverlauf zunimmt.

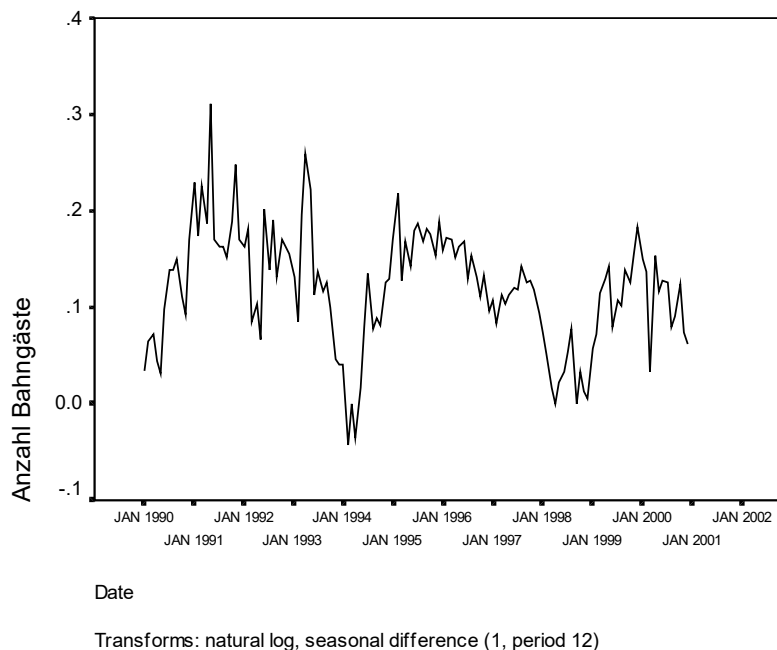
Als erstes ist das leicht exponentielle Ansteigen der Zeitreihe sowie die Zunahme der Streuung zu eliminieren, indem der natürliche Logarithmus bei der Darstellung der Anzahl Bahngäste gewählt wird.

Abb. 111: Stationäre Entwicklung Anzahl Bahngäste (1. Stufe)

Um stationäre Zeitreihenwerte zu erreichen, bietet sich hier die saisonale Differenzierung 'sd = 1' mit einer Periodizität 'P' von 12 an. Zu beachten ist, dass wir in einem saisonalen ARIMA-Modell zuerst mit der Bestimmung der saisonalen Komponenten beginnen. Somit tun wir dies auch bei der Differenzierung.

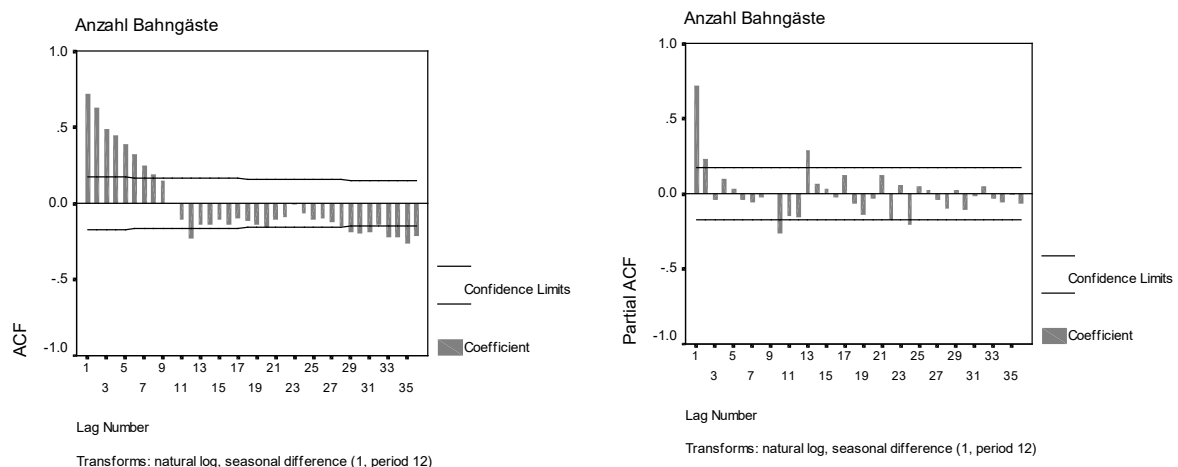
Nach der Vornahme dieser saisonalen Differenzierung sieht die Zeitreihe wie folgt aus und kann als stationär betrachtet werden.

Abb. 112: Stationäre Entwicklung Anzahl Bahngäste (2. Stufe)



In einem ersten Schritt betrachten wir nur die saisonalen ARIMA-Komponenten und somit lediglich die ACF²⁹⁰ und PACF²⁹¹ bei 12, 24 und 36 'Lags'. Die entsprechenden ACF- und PACF-Diagramme sehen nun wie folgt aus:

Abb. 113: ACF- und PACF-Entwicklung Anzahl Bahngäste



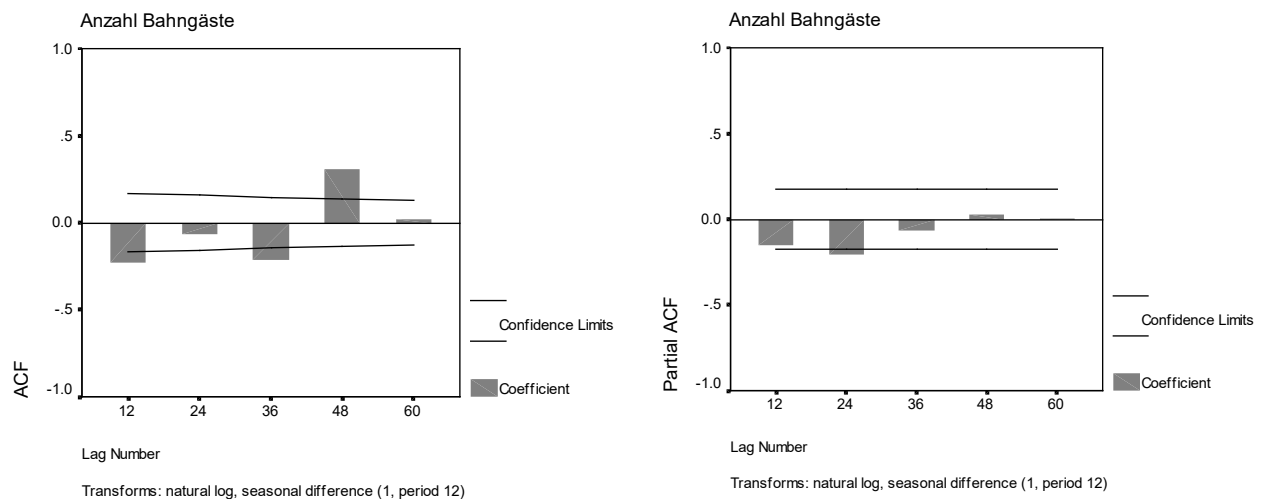
²⁹⁰ **auto correlation function**

²⁹¹ **partial auto correlation function**

Im ACF-Diagramm erkennt man eine (signifikante) ACF-Spitze bei 12 'Lags'. Beim PACF-Diagramm werden die PACF nach diesem 'Lag' von 12 grundsätzlich immer kleiner.

Da wir hier nur die saisonalen ARIMA-Komponenten mit einer Periodizität 'P' von 12 ermitteln wollen, können wir auch die oben aufgeführten ACF- und PACF-Diagramme so darstellen, dass nur jeder zwölfte ACF- und PACF-Wert dargestellt wird. Die entsprechenden ACF- und PACF-Diagramme sehen nun wie folgt aus:

Abb. 114: ACF- und PACF-Entwicklung Anzahl Bahngäste mit 'Lag' 12 und Vielfaches

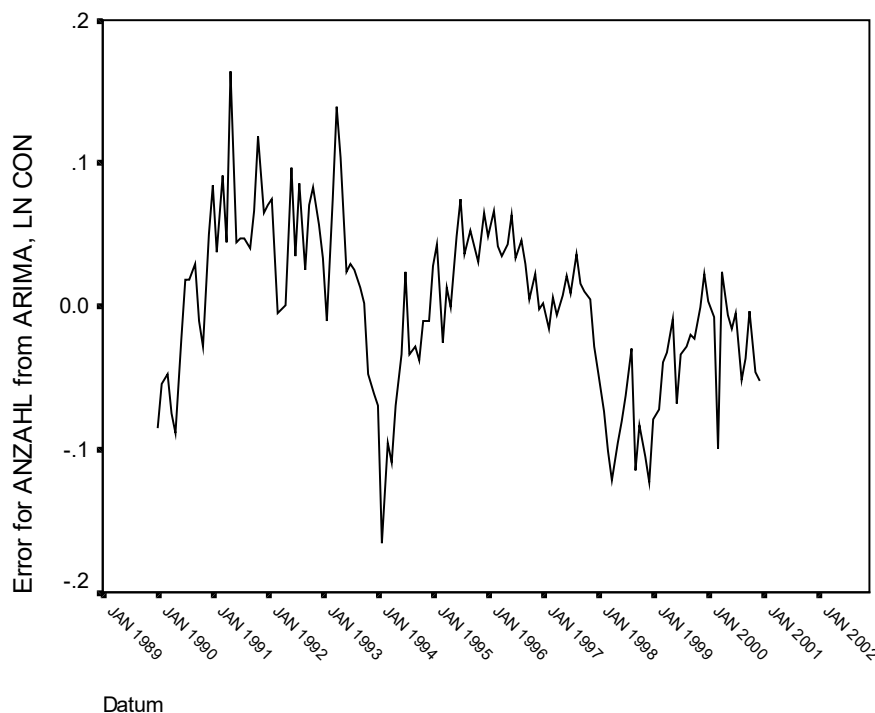


Aufgrund der theoretischen ACF- und PACF-Diagramme (siehe Anhang anschliessend an dieses Beispiel) deutet dies auf ein saisonales MA(1)-Modell hin; es gibt ein signifikantes ACF bei 'Lag' 12 und die PACF werden im Rhythmus von 12 'Lags' immer kleiner.

Dadurch sind nun die saisonalen Modellparameter als 'sp = 0, sd = 1, sq = '1' identifiziert.

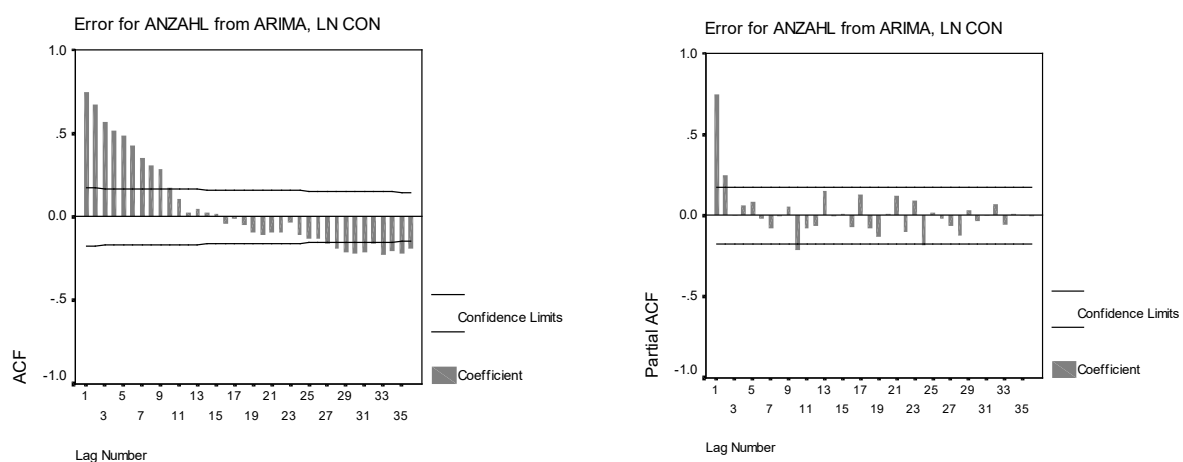
Aufgrund dieser Angaben wird das ARIMA-Modell mit den oben genannten saisonalen Parametern durchgerechnet. Dieses nun bereits 'saisonalisierte' ARIMA-Modell wird nun als Ausgangspunkt für die Analyse der nichtsaisonalen Parameter verwendet.

Auch hier wird zuerst überprüft, ob die Zeitreihe stationär ist. Da aber bereits ein 'saisonalisiertes' ARIMA-Modell vorhanden ist, werden nur noch die durch dieses 'vorläufige' Modell noch nicht 'definierten' (Vorhersage-)Fehler bzw. Residuenabweichungen in einem Diagramm aufgezeichnet, damit überprüft werden kann, ob diese (noch) stationär sind (siehe folgende Darstellung). Die Residuenabweichung ermittelt sich aus dem beobachteten Zeitreihenwert minus dem dazugehörig berechneten Prognosewert des Modells.

Abb. 115: 'Saisonalisiertes' ARIMA-Modell Entwicklung Anzahl Bahngäste

Es ist zu erkennen, dass die verbleibenden 'Fehler' weitgehend einen stationären Verlauf aufweisen. Der nichtsaisonale ARIMA-Modellparameter 'd' kann somit auf Null gesetzt werden, d.h. 'd = 0'.

Die ACF- und PACF-Diagramme aufgrund der verbleibenden Fehler sollen die Identifikation der nichtsaisonalen ARIMA-Komponenten 'p' und 'q' ermöglichen und sehen wie folgt aus:

Abb. 116: ACF und PACF 'saisonalisiertes' ARIMA-Modell Anzahl Bahngäste

Aufgrund der theoretischen ACF- und PACF-Diagramme (siehe THEORETISCHE ARIMA-MODELLE UND DEREN ACF- UND PACF-DIAGRAMME, Seite 219) deutet dies auf ein AR(1)-Modell hin; es gibt mehrere, kleiner werdende signifikante ACF ab 'Lag' 1 und die PACF sind nach dem 'Lag' 1 praktisch nicht mehr signifikant.

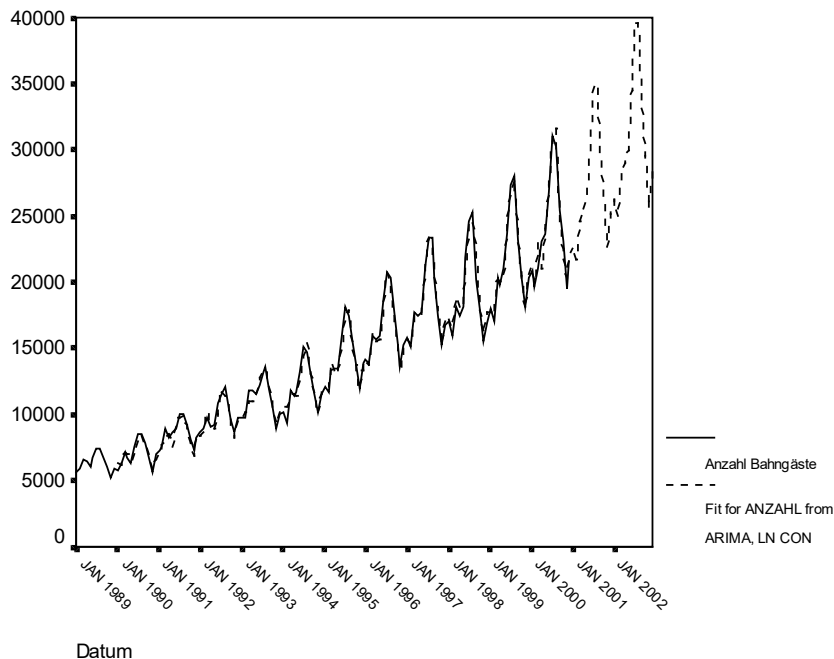
Somit sind die nichtsaisonalen Modellparameter als 'p = 1' und 'q = 0' identifiziert.

Das gesamte ARIMA-Modell ist somit wie folgt spezifiziert:

$$\text{ARIMA}(1, 0, 0)(0,1,1)12$$

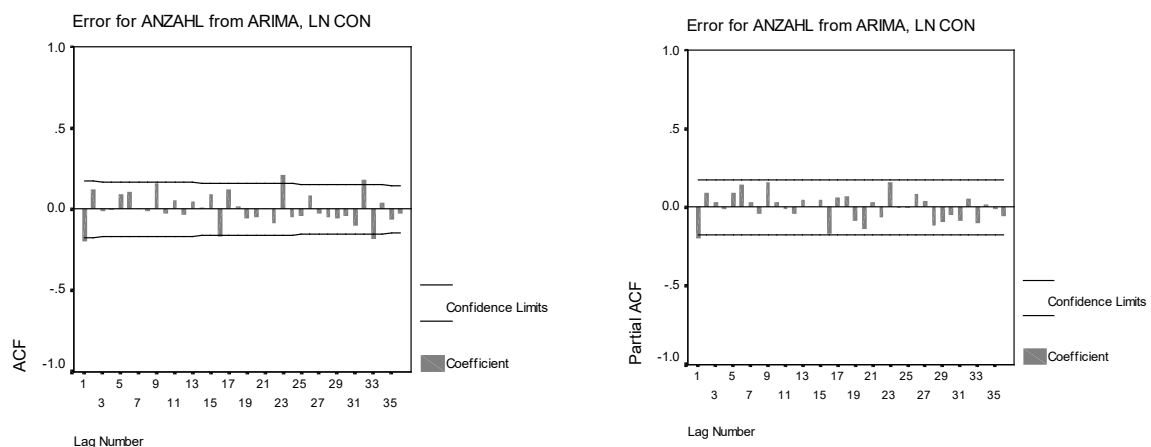
Nun wird das gesamte ARIMA-Modell mit den obigen Parametern durchgerechnet (inkl. Transformation der Zeitreihe in den natürlichen Logarithmus) und eine Vorhersage bzw. Prognose bis zum Dezember 2002 erstellt.

Abb. 117: 'Komplettes' ARIMA-Modell Entwicklung Anzahl Bahngäste



Selbstverständlich sind vorher noch die ACF- und PACF-Diagramme der nun definitiv verbleibenden Fehler zu erstellen und zu analysieren, d.h. Sicherstellung des Vorhandenseins eines 'weissen Rauschens'. Wie aus den untenstehenden ACF- und PACF-Diagrammen zu entnehmen ist, liegt nun keine Autokorrelation mehr vor und die vom ARIMA-Modell nicht erklärten Fehler entsprechen einem 'weissen Rauschen'.

Abb. 118: ACF und PACF 'komplettes' ARIMA-Modell Entwicklung Anzahl Bahngäste



11.3 Repetitionsfragen

11.3.1 Umsatzentwicklung eines Käseproduzenten²⁹²

Die folgende Tabelle beinhaltet die Umsatzentwicklung (Indexpunkte) eines Käseproduzenten (Durchschnitt 2015 gleich 100) für die jeweiligen Quartale der Jahre 2020 bis 2022. Weiter sind die anhand der Methode der kleinsten Quadrate berechneten Trendwerte der Umsatzentwicklung aufgeführt.

Jahr	Quartal	Umsatz	Trendwerte der Umsatzentwicklung
2020	I	111	106.77
	II	93	105.87
	III	97	104.97
	IV	122	104.07
2021	I	109	103.17
	II	90	102.27
	III	95	101.37
	IV	120	100.47
2022	I	107	99.57
	II	89	98.67
	III	92	97.77

- Berechnen Sie die Saisonkomponenten (ohne Korrektur(wert)) unter Verwendung eines additiven Zeitreihenzerlegungs-Modells. Die Ermittlung der Saisonkomponenten soll hier nicht auf der Basis der gleitenden Durchschnitte der Umsätze, sondern auf der Basis der bereits berechneten Trendwerte der Umsatzentwicklung vorgenommen werden.
- Wie gross muss der Korrekturwert für alle vier Saisonkomponenten betragen, damit die Addition der Saisonkomponenten Null beträgt?

11.3.2 Umsatzentwicklung eines Unternehmens in Spanien

Ein Unternehmen verfügt über detailliertes Datenmaterial bezüglich Umsatzes je Land und je Produkt. Speziell über die Entwicklung der Umsätze in Spanien möchte die Geschäftsleitung mehr wissen.

Folgende Umsatz-Daten je Trimester (Saison) der Jahre 2000 bis 2002 in Mio. Peseta sind bekannt:

Trimester (Saison)	2000	2001	2002
I	24	30	35
II	18	24	28
III	34	45	58

- Stellen Sie die Zeitreihe graphisch dar.
- Begründen Sie, welches Zeitreihenzerlegungs-Modell Sie im vorliegenden Fall für das geeignetste halten.
- Ermitteln Sie die gleitenden Trimesterdurchschnitte.
- Ermitteln Sie die saisonbereinigten Umsätze für alle Trimester der Jahre 2000 bis 2002
- Ermitteln Sie die saisonalisierte Prognose für die drei Trimester 2003.

²⁹² siehe auch ECKSTEIN, 1998, S. 43f+146f.

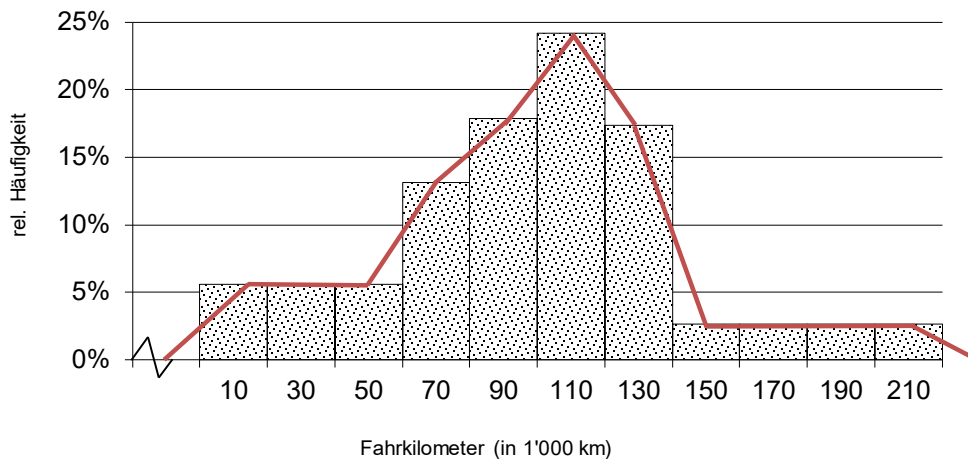
12 LÖSUNGEN ZU REPETITIONSFRAGEN

12.1 Aufgabe zu HÄUFIGKEITSVERTEILUNG

12.1.1 Fahrkilometer einer PKW-Flotte (Seite 11)

Distanz (Klassenmitte) (in 1'000 km)	Häufigkeit (absolut)	Häufigkeit (relativ)
10	10.67	5.61%
30	10.67	5.61%
50	10.67	5.61%
70	25	13.16%
90	34	17.89%
110	46	24.21%
130	33	17.37%
150	5	2.63%
170	5	2.63%
190	5	2.63%
210	5	2.63%

Histogramm und Polygonzug über Anzahl Fahrkilometer von PKW's
bis zur ersten grösseren Reparatur

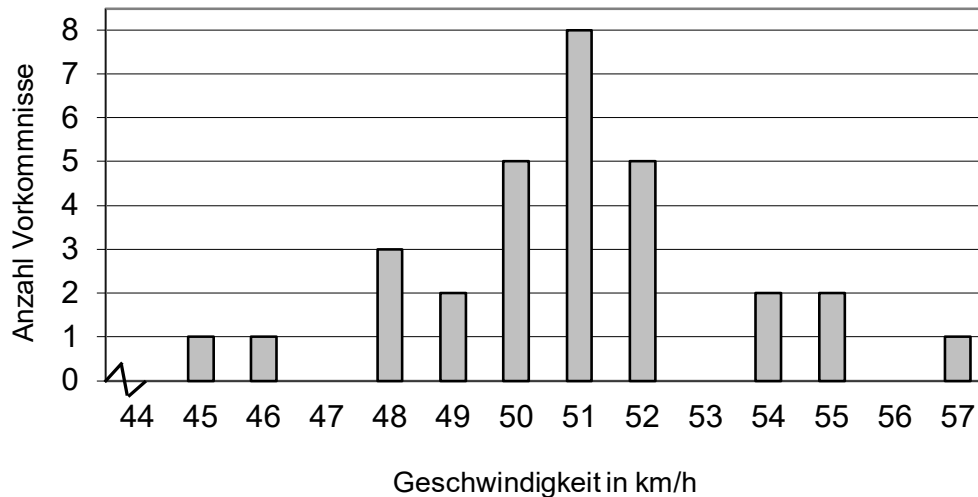


Die Schwierigkeit bei dieser Aufgabe besteht darin, dass das erste Kategorienintervall drei Mal und letzte vier Mal so gross ist wie die dazwischenliegenden. Für eine visuelle bzw. flächenmässig korrekte Darstellung müssen die Häufigkeiten in diesen Kategorien durch drei bzw. vier dividiert werden.

12.2 Aufgaben zu GRAFISCHE DARSTELLUNGEN

12.2.1 Geschwindigkeitsmessungen (Seite 17)

Geschwindigkeitsprobemessungen in einem Wohngebiet



Die Schwierigkeit bei dieser Aufgabe besteht darin, dass die Geschwindigkeit von 47 km/h und 56 km/h nicht vorkommt, und somit bei diesen beiden Geschwindigkeiten keine Säulen eingezeichnet werden dürfen. Die Schwierigkeit ist nicht besonders gross, wenn man die grafische Darstellung manuell erstellt. Wird die grafische Darstellung aber mit einer Software gemacht, dann ist - wegen der vorhandenen 'Lücken' - die Verwendung des Typs 'Säulen-Diagramm' nicht anwendbar.

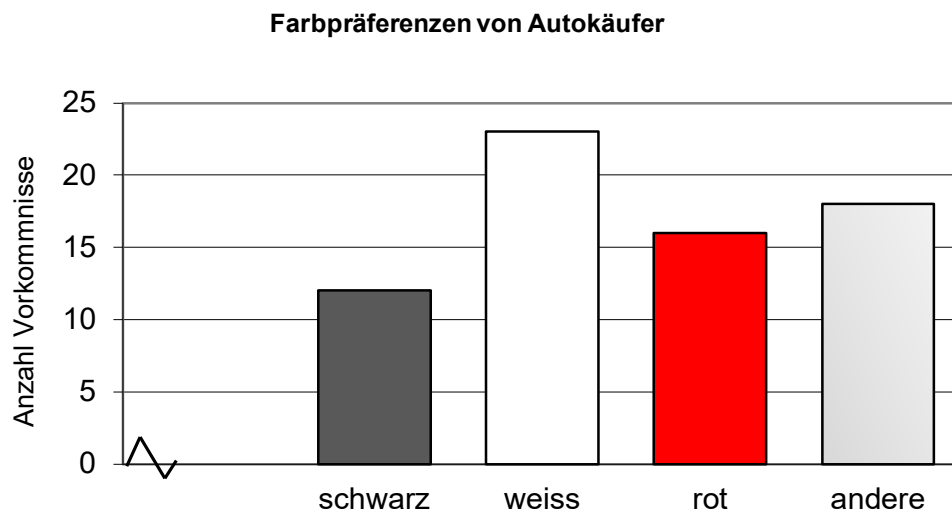
Die Abstände zwischen den Säulen könnten auch weggelassen werden. Dann wäre die Darstellung ein Histogramm der dreissig Probemessungen. Diese Art der grafischen Darstellung könnte wie folgt begründet werden: Die Geschwindigkeitsmessungen vom Radargerät stellen gerundete Werte dar (z.B. Probemessungsangabe von 45 km/h: gerundeter Wert einer effektiven Probemessung im Bereich von 44.50 km/h und 45.49 km/h). Auf der X-Achse sind somit stetige Daten.

Dieses Argument wäre aber bei z.B. der folgenden Fragestellung nicht mehr gültig: Bei einem neuartigen Computer-Spiel können von den Spielern lediglich ganze Punkte gewonnen werden.

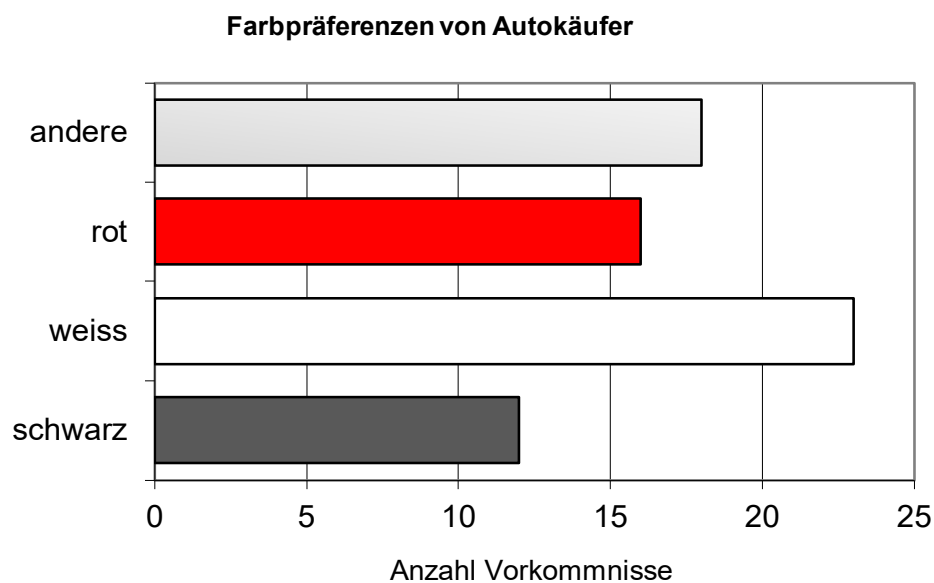
Für die letzten dreissig Spiele wurde folgende Anzahl Punkte von den Spielern gewonnen....

12.2.2 Farbpräferenzen von Autokäufern (Seite 17)

Säulendiagramm:

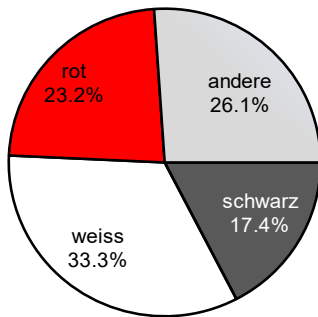


Balkendiagramm:



Kreis-Diagramm:

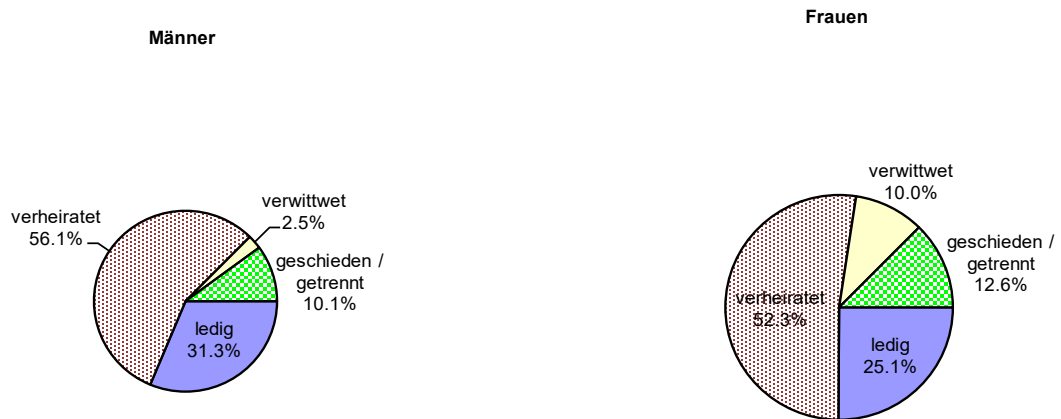
Farbpräferenzen von Autokäufer



Wenn die Rubrik 'andere' nicht aufgeführt worden wäre, dürfte kein Kreis-Diagramm gezeichnet werden, da dieses immer unterstellt, dass man die ganze Summe von Merkmalsträgern kennt.

Die Schwierigkeit bei dieser Aufgabe besteht darin, dass sich die Säulen bzw. Balken bei den entsprechenden Diagrammen nicht berühren dürfen. Dadurch würde visuell vorgetäuscht, dass es sich um 'kontinuierliche' Merkmalsausprägungen handelt.

12.2.3 Zivilstand in den USA (Seite 17)



Wenn der Radius des Kreisdiagrammes der Männer z.B. 1.8 cm betragen würde, dann müsste der Radius des Kreisdiagrammes der Frauen 2.2 cm ausmachen.

$$\text{Radius}_{\text{Frauen}} = \text{Radius}_{\text{Männer}} \cdot \sqrt{\frac{\text{Merkmalsträgersumme}_{\text{Frauen}}}{\text{Merkmalsträgersumme}_{\text{Männer}}}}$$

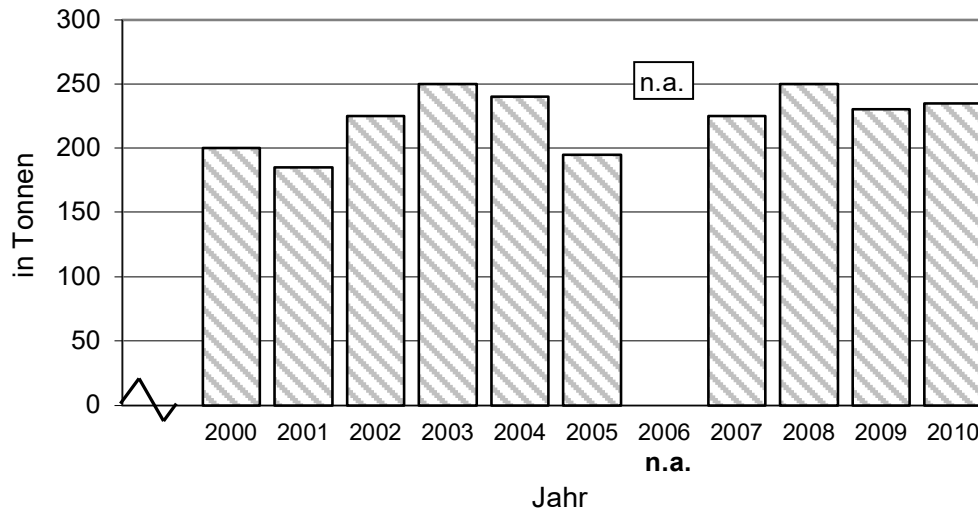
$$\text{Radius}_{\text{Frauen}} = 1.8 \text{ cm} \cdot \sqrt{\frac{60\%_{\text{Frauen}}}{40\%_{\text{Männer}}}} = 2.2 \text{ cm}$$

	in Grad	
	Männer	Frauen
ledig	112.7	90.4
verheiratet	201.9	188.2
verwittwet	9.0	36.0
geschieden / getrennt	36.4	45.4
	360.0	360.0

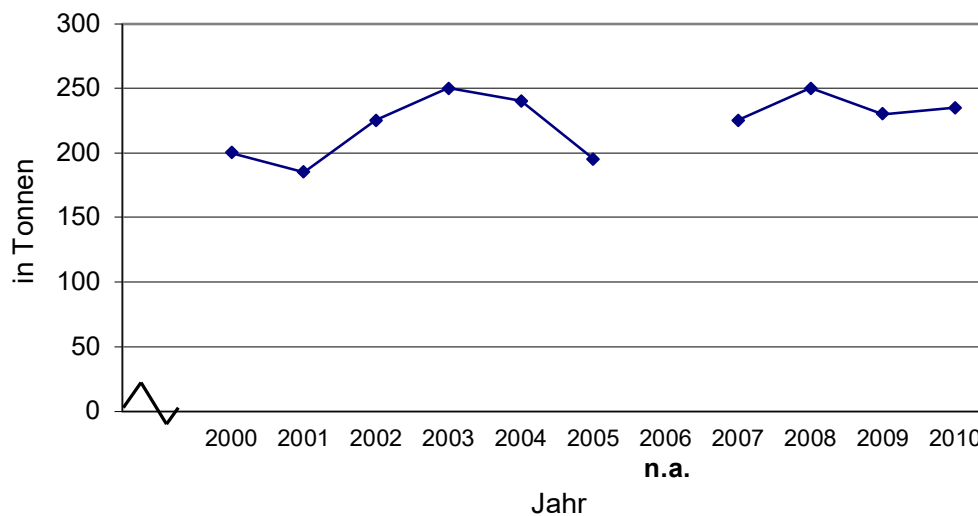
Da der Frauen- bzw. Männer-Anteil unterschiedlich gross ist, besteht die Schwierigkeit bei dieser Aufgabe darin, dass die beiden Kreis-Diagramme nicht gleich gross gezeichnet werden dürfen. Flächenmässig müssen sich die beiden Kreise entsprechend des Frauen- bzw. Männer-Anteils unterscheiden.

12.2.4 Kartoffel-Ernte (Seite 18)

Entwicklung der Kartoffelernte der Farm der Familie Müller



Entwicklung der Kartoffelernte der Farm der Familie Müller



Die Schwierigkeit bei dieser Aufgabe besteht darin, dass das Jahr 1996, für das keine Angaben vorhanden sind, speziell gekennzeichnet werden muss. Zudem darf beim Linien-Diagramm keine Verbindung zwischen der Merkmalsausprägung für das Jahr 1995 und 1997 'gezogen' werden.

Im Säulendiagramm könnten die Abstände zwischen den Säulen auch weggelassen werden, da man argumentieren könnte, die Zeitachse X sei stetig. Darin liegt auch die Begründung für die zweite Lösung anhand eines Liniendiagramms. Wenn man aber beachtet, dass die Kartoffelernte pro Jahr eine Total-Summe für ein ganzes Jahr darstellt, ist das vorstehende Argument nicht ganz stichhaltig.

12.3 Aufgaben zu INDEXZAHLEN

12.3.1 Konzernumsatz-Entwicklungen (Seite 29)

Umsätze 2011

Land / Konzern	'Translation- Kurs'	Umsatz	Umsatz		'Translation- Kurs'	Umsatz	Umsatz
	2011	in Lokal- währung (in 1'000)	in Konzern- währung (in 1'000)		2012	in Lokal- währung (in 1'000)	in Konzern- währung (in 1'000)
	p_o	q_o			p_i	q_o	
USA	0.888	4'500	3'996		0.939	4'500	4'226
Grossbritannien	1.421	2'500	3'553		1.487	2'500	3'718
Deutschland	1.233	6'000	7'398		1.205	6'000	7'230
Schweiz	1.000	12'000	12'000		1.000	12'000	12'000
Total Konzern			<u>26'947</u>				<u>27'173</u>

Umsätze 2012

Land / Konzern	'Translation- Kurs'	Umsatz	Umsatz		'Translation- Kurs'	Umsatz	Umsatz
	2012	in Lokal- währung (in 1'000)	in Konzern- währung (in 1'000)		2011	in Lokal- währung (in 1'000)	in Konzern- währung (in 1'000)
	p_i	q_i			p_o	q_i	
USA	0.939	5'000	4'695		0.888	5'000	4'440
Grossbritannien	1.487	3'000	4'461		1.421	3'000	4'263
Deutschland	1.205	6'100	7'351		1.233	6'100	7'521
Schweiz	1.000	11'900	11'900		1.000	11'900	11'900
Total Konzern			<u>28'407</u>				<u>28'124</u>

Wert-Index	= (c) / (a)	105.418%	gleich	gleich
Preis-Index	nach Laspeyres = (b) / (a) nach Paasche = (c) / (d)	100.841% 101.003%	} mal ↑	} mal ↑
Mengen-Index	nach Laspeyres = (d) / (a) nach Paasche = (c) / (b)	104.371% 104.539%		

Veränderung des konsolidierten Umsatzes des Konzerns in Konzernwährung gegenüber Vorjahr:

5.42%

Unter der Voraussetzung, dass die Veränderung des Lokalwährungsumsatzes als «reine» Mengenabweichung hervorgehoben werden möchte, setzt sich die Veränderung wie folgt zusammen:

- Veränderung aufgrund von Wechselkursabweichungen (Wechselkursveränderungen gegenüber Vorjahr gewichtet mit den Lokalwährungsumsätzen des laufenden Jahres) **1.00%**
- Veränderung aufgrund von Umsatzabweichungen in Lokalwährungen (Lokalwährungsumsatzveränderungen gegenüber Vorjahr gewichtet mit den Wechselkursen des Vorjahres) **4.37%**

Ein Wert-Index setzt sich immer aus einem Paasche-Preis-Index und einem Laspeyres-Mengen-Index (bzw. vice versa) zusammen (siehe rechte Seite der obigen Index-Berechnungen)!

12.3.2 Auswirkung der Inflation auf die Erfolgsrechnung eines Unternehmens (Seite 30)

IST-Erfolgsrechnung der Handels-AG 2012

Materialaufwand	150	Erlös	250
Personalaufwand	50		
übriger Verwaltungs- und Vertriebsaufwand	30		
Betriebserfolg	20		
	<u>250</u>		<u>250</u>

voraussichtliche "Preisveränderungen":

Materialaufwand	8.0%	Erlös	5.0%
Personalaufwand	2.0%		
übriger Verwaltungs- und Vertriebsaufwand	1.5%		

Preis-Index des Betriebserfolgs (nach Laspeyres):

$$= \frac{1.05 \cdot 250 - 1.08 \cdot 150 - 1.02 \cdot 50 - 1.015 \cdot 30}{1 \cdot 250 - 1 \cdot 150 - 1 \cdot 50 - 1 \cdot 30}$$

$$= \mathbf{0.9525}$$

Rechnerische Kontrolle:

Budget-Erfolgsrechnung der Handels-AG 2013

Materialaufwand	162.00	Erlös	262.50
Personalaufwand	51.00		
übriger Verwaltungs- und Vertriebsaufwand	30.45		
Betriebserfolg	19.05		
	<u>262.50</u>		<u>262.50</u>

Budgetierte Veränderung des Betriebserfolgs gegenüber Vorjahr: **-4.75%**

12.3.3 Preis- und Mengenentwicklung eines Schnellimbissrestaurants in Zürich²⁹³ (Seite 30)

zu erstem Punkt:

Paasche-Preisindex:	Preise werden zu Mengen des Jahres 2012 gewichtet.		
für 2011:	112.00		
für 2012:	109.00		
=	0.9732	bzw.	97.32%

Die Preise von 2012 sind im Durchschnitt gegenüber 2011 um 2.68% gesunken.

zu zweitem Punkt:

Wert- bzw. Umsatz-Index =	Paasche-Preisindex	mal	Laspeyres-Mengenindex
=	0.9732	mal	0.9500
=	0.9245	bzw.	92.45%

Demnach ist der Umsatz von 2012 gegenüber 2011 um 7.55% gesunken.

12.3.4 Einkaufs- und Verkaufspreisentwicklung eines Handelsunternehmens (Seite 31)

zu erstem Punkt:

Laspeyres-Preisindex -> Die Gewichtung erfolgt via die Mengen von 2010; nur die Preise ändern sich von Jahr zu Jahr.

	Einkaufspreis- Index Artikelgruppe 'Celfa'		Verkaufspreis- Index Artikelgruppe 'Celfa'	
2010	100.00		100.00	
2011	111.59	100.00	106.19	100.00
2012	106.01	95.00	106.67	100.45

²⁹³ siehe auch ECKSTEIN, 1998, S. 23+128.

zu zweitem Punkt:

Reales Austauschverhältnis gegenüber 2010 (Indexstand Verkaufspreise / Indexstand Einkaufspreise)

2011	95.16
2012	100.62

Sowohl der Index der Einkaufspreise als auch der Index der Verkaufspreise ist 2011 gegenüber 2010 gestiegen. Der Index der Einkaufspreise ist aber stärker gestiegen als derjenige der Verkaufspreise, was sich in einer Reduktion des realen Austauschverhältnisses um rund 4.84 Indexpunkten niederschlägt (Reduktion Bruttogewinn-Marge!).

2012 gegenüber 2011 ist der Index der Einkaufspreise gesunken, während der Index der Verkaufspreise noch etwas gestiegen ist. Dadurch hat sich gegenüber dem Vorjahr das reale Austauschverhältnis um 5.46 Indexpunkte erhöht (Erhöhung Bruttogewinn-Marge!). Die Erhöhung des realen Austauschverhältnisses (2012) ist grösser ausgefallen als die Verringerung (2011), was in einem 2012 (gegenüber 2010) insgesamt höheren realen Austauschverhältnis von 0.62 Indexpunkten mündet.

zu drittem Punkt:

Um eine Vergleiche von unterschiedlichen Warenkörben vornehmen zu können, werden die **Indizes verknüpft bzw. verkettet**.

	Einkaufspreis-Index Artikelgruppe 'Celfa'		Verkaufspreis-Index Artikelgruppe 'Celfa'	
	alter Index	neuer Index	alter Index	neuer Index
2008	100.00	93.63	100.00	93.37
2009	105.23	98.53	102.30	95.52
2010	106.80	100.00	107.10	100.00
2011	119.18	111.59	113.73	106.19
2012	113.22	106.01	114.24	106.67

Aufgrund der obigen 'verketteten' Index-Reihe ist ersichtlich, dass der Indexstand der Einkaufspreise unter demjenigen der Verkaufspreise liegt. Dies bedeutet, dass sich das reale Austauschverhältnis bzw. die Bruttogewinnmarge im Jahr 2012 bezüglich 2008 leicht verbessert hat.

12.4 Aufgaben zu MITTELWERTE UND KENNZAHLEN DER STREUUNG

12.4.1 Anzahl defekter Teile (Seite 48)

Modus	9.00 defekte Teile
arithmetisches Mittel	9.95 defekte Teile
Standardabweichung einer Stichprobe	1.40 defekte Teile

Berechnungs-Details

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} \quad s = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}}$$

Anzahl de-
fekte Teile

x_i	$(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})^2$
9	-0.95	0.91
11	1.05	1.09
12	2.05	4.18
9	-0.95	0.91
9	-0.95	0.91
12	2.05	4.18
9	-0.95	0.91
12	2.05	4.18
9	-0.95	0.91
8	-1.95	3.82
9	-0.95	0.91
8	-1.95	3.82
11	1.05	1.09
9	-0.95	0.91
12	2.05	4.18
11	1.05	1.09
8	-1.95	3.82
11	1.05	1.09
10	0.05	0.00
11	1.05	1.09
10	0.05	0.00
9	-0.95	0.91
$\Sigma =$	219	40.95
$\bar{x} =$	9.95	

12.4.2 Einkaufs- und Verkaufspreise (Seite 48)

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$$

$$s = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}}$$

Celfa 1	Einkaufspreise pro Einheiten			Verkaufspreise pro Einheiten		
	x_i	$(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})^2$	x_i	$(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})^2$
2021	2.50	-0.50	0.25	10.00	-0.67	0.44
2022	3.00	-	-	10.50	-0.17	0.03
2023	3.50	0.50	0.25	11.50	0.83	0.69
Σ	9.00		0.50	32.00		1.17
$\bar{x} =$	3.000			10.667		
$s =$			0.500			0.764
CV =			16.67%			7.16%

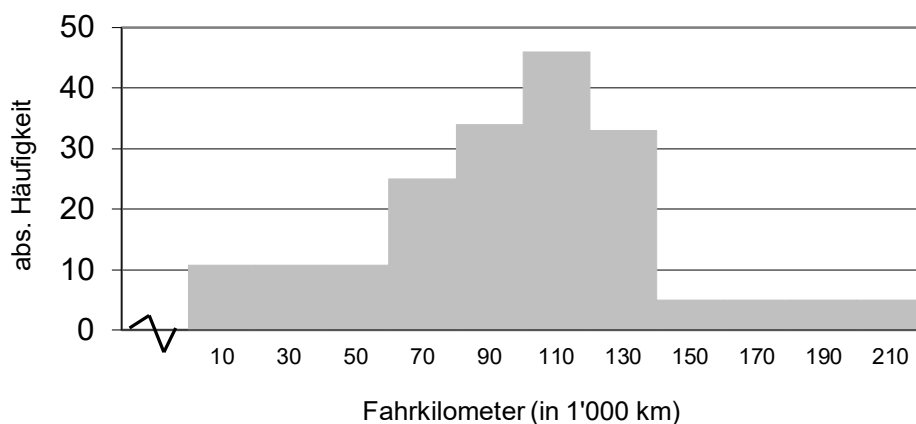
Celfa 2	Einkaufspreise pro Einheiten			Verkaufspreise pro Einheiten		
	x_i	$(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})^2$	x_i	$(x_i - \bar{x})$	$(x_i - \bar{x})^2$
2021	4.00	-1.00	1.00	5.00	0.50	0.25
2022	5.00	-	-	4.50	-	-
2023	6.00	1.00	1.00	4.00	-0.50	0.25
Σ	15.00		2.00	13.50		0.50
$\bar{x} =$	5.000			4.500		
$s =$			1.000			0.500
CV =			20.00%			11.11%

Da sich die absoluten Einkaufs- und Verkaufspreise wesentlich voneinander unterscheiden, stellen weder die arithmetischen Mittel noch die Standardabweichungen aussagefähige Kennzahlen dar. Erst die 'relativierte' Standardabweichung bzw. der Variationskoeffizient zeigt, dass das Handelsunternehmen sowohl bei Celfa 1 als auch bei Celfa 2 ein grösseres Risiko (d.h. grösserer Variationskoeffizient) auf der Beschaffungsseite aufweist als auf der Absatzseite. Eine mögliche Erklärung dafür wäre z.B., dass die Einkaufspreise durch den internationalen Spot-Markt vorgegeben sind, während die Verkaufspreise durch inländischen Konkurrenzdruck nur 'verzögert' angepasst werden können. Das Handelsunternehmen ist somit einem mangelnden 'Preisüberwälzungsrisiko' ausgesetzt.

12.4.3 Fahrkilometer einer PKW-Flotte (Seite 49)

Distanz (Klassenmitte) (in 1'000 Meilen)	Häufigkeit (absolut)	kum. Häufigkeit (absolut)	
10	10.67	10.67	
30	10.67	21.33	
50	10.67	32	
70	ab 60 bis und mit 80	25	57
90	ab 80 bis und mit 100	34	91 ← 95
110	ab 100 bis und mit 120	46	137
130	ab 120 bis und mit 140	33	170
150	5	175	
170	5	180	
190	5	185	
210	5	190	

Histogramm über Anzahl Fahrkilometer von PKW's bis zur ersten grösseren Reparatur



Modus	Liegt in der Klasse ab 100 bis und mit 120
Median	Liegt am Anfang der Klasse ab 100 bis und mit 120 (interpoliert: $100 + ((4/46) \cdot 20) = 101.7$)
arithmetisches Mittel	Kann nur mit den einzeln festgestellten Anzahl Fahrkilometern korrekt berechnet werden. Approximativ, aufgrund der Klassenmitten, kann folgende durchschnittliche Anzahl Fahrkilometer berechnet werden: 98'526

Lösung Median (interpoliert): Da die PKW-Flotte mehr als ca. 100 PKW aufweist, wurde der Median bei ' $n / 2$ ' bzw. ' $190 / 2 = 95$ ' Vorkommnissen berechnet. Ganz korrekt wäre es, wenn der Median bei ' $(n + 1) / 2$ ' bzw. ' $(190 + 1) / 2 = 95.5$ ' Vorkommnissen berechnet würde. Daraus ergäbe sich ein (interpolierter) Median von: $100 + ((4.5/46) \cdot 20) = 101.96$. Die beiden Resultate unterscheiden sich nur unwesentlich. Zudem ist festzuhalten, dass ein 'interpolierter' Median eine gleichmässige Verteilung innerhalb der Kategorie unterstellt, was nur in ganz wenigen Fällen tatsächlich zutrifft.

12.4.4 Anzahl Arbeitsunfälle in einem Unternehmen²⁹⁴ (Seite 49)

Modus	0.00 Arbeitsunfälle je Mitarbeiter
Median	0.00 Arbeitsunfälle je Beschäftigter
arithmetisches Mittel	0.12 Arbeitsunfälle je Beschäftigter
Standardabweichung	0.38 Arbeitsunfälle je Beschäftigter

Berechnungs-Details

$$\mu \Rightarrow \bar{x} = \frac{\sum (w_i \cdot x_i)}{\sum w_i} \quad \sigma = \sqrt{\frac{\sum [(x_i - \mu)^2 \cdot w_i]}{\sum w_i}}$$

Anzahl Arbeitsunfälle	relative Häufigkeit				
x_i	w_i	$(w_i \cdot x_i)$	$(x_i - \mu)$	$(x_i - \mu)^2$	$(x_i - \mu)^2 \cdot w_i$
0	90%	0.00	-0.12	0.014	0.013
1	8%	0.08	0.88	0.774	0.062
2	2%	0.04	1.88	3.534	0.071
$\Sigma = 3$	100%	0.12	2.64	4.323	0.146
$\mu \Rightarrow \bar{x} =$		0.12			
$\sigma =$					0.38

Die Aussagekraft der beiden Kennzahlen ist für sich allein gesehen nicht sehr gross. Werden diese aber über die Zeit hinweg verfolgt, sind entsprechende Aussagen über deren Entwicklung möglich.

²⁹⁴ siehe auch ECKSTEIN, 1998, S. 6+111.

12.5 Aufgaben zu WAHRSCHEINLICHKEITSRECHNUNG

12.5.1 Terramare AG (Seite 68)

- a) siehe die einzelnen Matrix-Zellen in der untenstehenden Entscheidungstabelle
- b) siehe letzte Spalte in der untenstehenden Entscheidungstabelle
- c) Obwohl bei Einkaufsvariante 2000 kg und 3000 kg der gleiche Erwartungswert, nämlich CHF 7'000, resultiert, ist die Variante 2000 kg vorzuziehen, da sie eine kleinere Streuung (bzw. Risiko) aufweist.

Matrix der täglichen Zahlungsüberschüsse

relative Häufigkeit	10%	30%	30%	20.0%	10.0%	
Absatz Einkauf	1'000 kg	2'000 kg	3'000 kg	4'000 kg	5'000 kg	Erwartungswert
1'000 kg	4'000.00	4'000.00	4'000.00	4'000.00	4'000.00	4'000.00
2'000 kg	-2'000.00	8'000.00	8'000.00	8'000.00	8'000.00	7'000.00
3'000 kg	-8'000.00	2'000.00	12'000.00	12'000.00	12'000.00	7'000.00
4'000 kg	-14'000.00	-4'000.00	6'000.00	16'000.00	16'000.00	4'000.00
5'000 kg	-20'000.00	-10'000.00	0.00	10'000.00	20'000.00	-1'000.00

12.5.2 Ventilkolben-Unternehmen (Seite 69)

12.5.2.1 Lösungsvorschlag

zu erstem Punkt:

Ergebnistabelle bezüglich zusätzlichem Gewinn des Auftrags

Umweltzustände Alternativen	opt. Szenario 25%	real. Szenario 45%	pess. Szenario 30%	Erwartungs- wert	Minimax- Prinzip
Auftrag annehmen	18'000.00	6'000.00	-8'000.00	4'800.00	-8'000.00
Auftrag ablehnen	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

zu zweitem Punkt:

Der Erwartungswert bezüglich zusätzlichen Gewinns des Auftrages bei der (Entscheidungs-)Alternative 'Auftrag annehmen' beträgt **CHF 4'800.00**, derjenige von 'Auftrag ablehnen' beträgt **CHF 0.00**. Das Unternehmen sollte somit die (Entscheidungs-)Alternative '**Auftrag annehmen**' wählen (Maximierung der (Entscheidungs-)Alternativen).

zu drittem Punkt:

Bei (Entscheidungs-)Alternative 'Auftrag annehmen' ist die ungünstigste Situation **CHF -8'000.00**, bei 'Auftrag ablehnen' **CHF 0.00**. Das Unternehmen sollte somit die (Entscheidungs-)Alternative 'Auftrag ablehnen' wählen (Maximierung der (Entscheidungs-)Alternativen).

zu viertem Punkt:

Von der Ergebnistabelle des Lösungsvorschlages beim ersten Punkt wird pro Szenario der maximale zusätzliche Gewinn genommen, da das Unternehmen anhand der zusätzlichen Abklärungen jeweils genau weiss, wie hoch der zusätzliche Gewinn sein wird und entsprechend den Auftrag annimmt oder ablehnt. Da noch ungewiss ist, welches Szenario nach den zusätzlichen Abklärungen Gültigkeit haben wird, ermittelt man den Erwartungswert dieser so ermittelten (maximalen) zusätzlichen Gewinne. Die Differenz zum (maximalen) Erwartungswert des Lösungsvorschlages beim zweiten Punkt ist der 'Wert der vollkommenen Information'.

Umweltzustände	opt. Szenario 25%	real. Szenario 45%	pess. Szenario 30%	Erwartungs- wert
zusätzlicher Gewinn	18'000.00	6'000.00	0.00	7'200.00

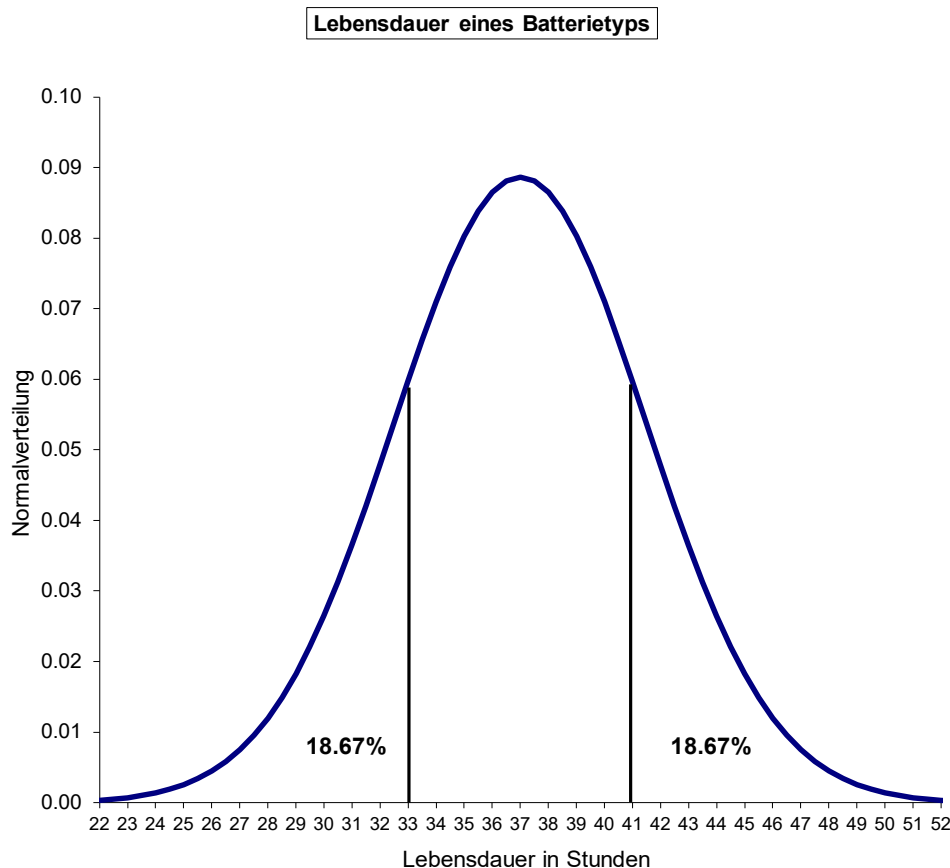
Das Unternehmen sollte nicht mehr als **CHF 2'400.00** (CHF 7'200.00 minus CHF 4'800.00) für die zusätzlichen Abklärungen ausgeben.

12.6 Aufgaben zu Stetige Zufallsverteilungen

12.6.1 Lebensdauer eines Batterietyps (Seite 93)

'X' entspreche der Lebensdauer in Stunden des Batterietyps. 'X' ist gemäss obigen Angaben normalverteilt mit den Parametern: arithmetisches Mittel von 37 Stunden und Standardabweichung von 4.5 Stunden.

Die diesbezügliche Dichtefunktion sieht wie folgt aus:



Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Batterie dieses Typs eine Lebensdauer von 33 Stunden und mehr aufweist, entspricht der Wahrscheinlichkeit $P(A)$ mit folgender Standardvariablen:

$z \geq \frac{x - \mu}{\sigma} \geq \frac{33 - 37}{4.5} \geq -0.89$, d.h. gemäss Standardnormalverteilungstabelle ergibt dies eine Wahrscheinlichkeit von: $0.3133 + 0.5 = 0.8133$

Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Batterie dieses Typs eine Lebensdauer von 41 Stunden und mehr aufweist, entspricht der Restwahrscheinlichkeit $P(B)$ mit folgender Standardvariable:

$z \geq \frac{x - \mu}{\sigma} \geq \frac{41 - 37}{4.5} \geq +0.89$, d.h. gemäss Standardnormalverteilungstabelle ergibt dies eine Restwahrscheinlichkeit von: $0.5 - 0.3133 = 0.1867$

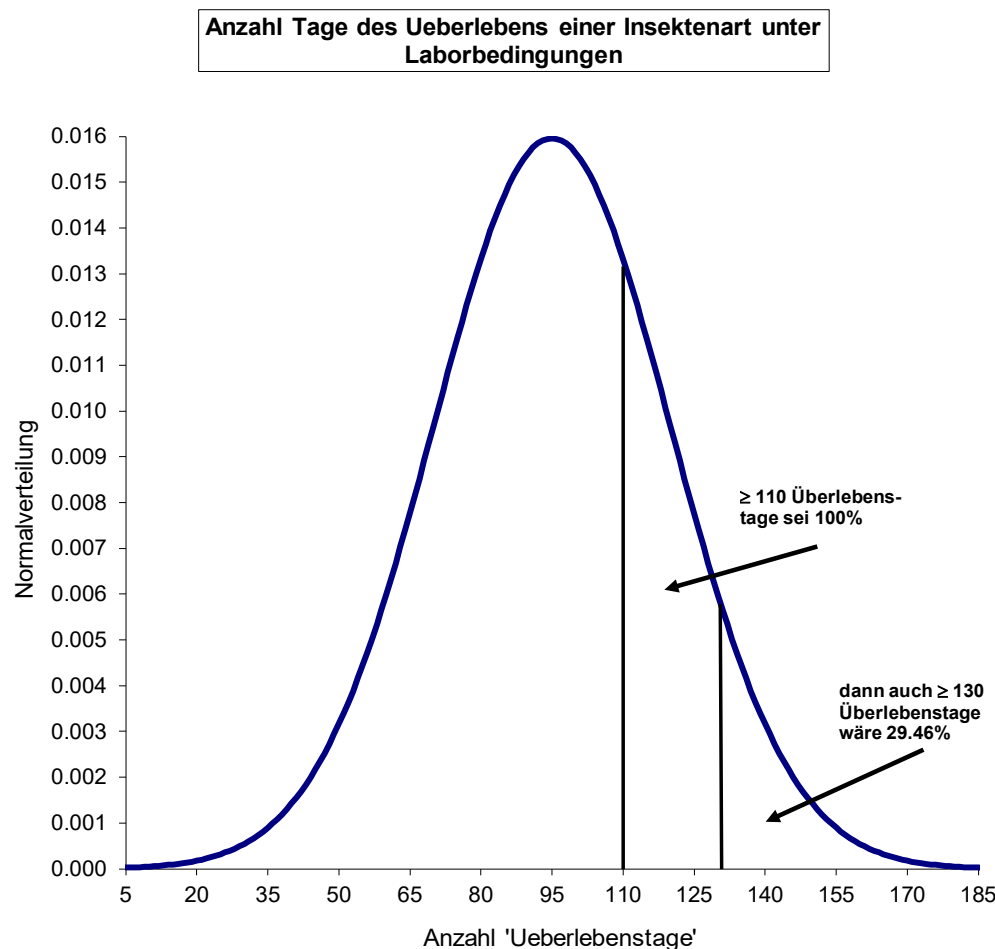
Die Wahrscheinlichkeit, dass eine Batterie dieses Typs eine Lebensdauer zwischen 33 und 41 Stunden aufweist, beträgt somit:

$$P(A) - P(B) = 0.8133 - 0.1867 = 0.6266 = 62.66\%$$

12.6.2 Anzahl 'Überlebenstage' einer Insektenart unter Laborbedingungen (Seite 93)

'X' entspreche der Anzahl 'Überlebenstage' der Insektenart. 'X' ist gemäss obigen Angaben normalverteilt mit den Parametern: arithmetisches Mittel von 95 Tagen und Standardabweichung von 25 Tagen.

Die diesbezügliche Dichtefunktion sieht wie folgt aus:



Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Insekt dieser Insektenart 110 Tage überlebt, entspricht der Restwahrscheinlichkeit $P(A)$ mit folgender Standardvariable:

$$z \geq \frac{x - \mu}{\sigma} \geq \frac{110 - 95}{25} \geq 0.60 \quad , \text{ d.h. gemäss Standardnormalverteilungstabelle ergibt dies eine Restwahrscheinlichkeit von: } 0.5 - 0.2257 = 0.2743$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Insekt dieser Insektenart 130 Tage überlebt, entspricht der Restwahrscheinlichkeit $P(B)$ mit folgender Standardvariable:

$$z \geq \frac{x - \mu}{\sigma} \geq \frac{130 - 95}{25} \geq 1.40 \quad , \text{ d.h. gemäss Standardnormalverteilungstabelle ergibt dies eine Restwahrscheinlichkeit von: } 0.5 - 0.4192 = 0.0808$$

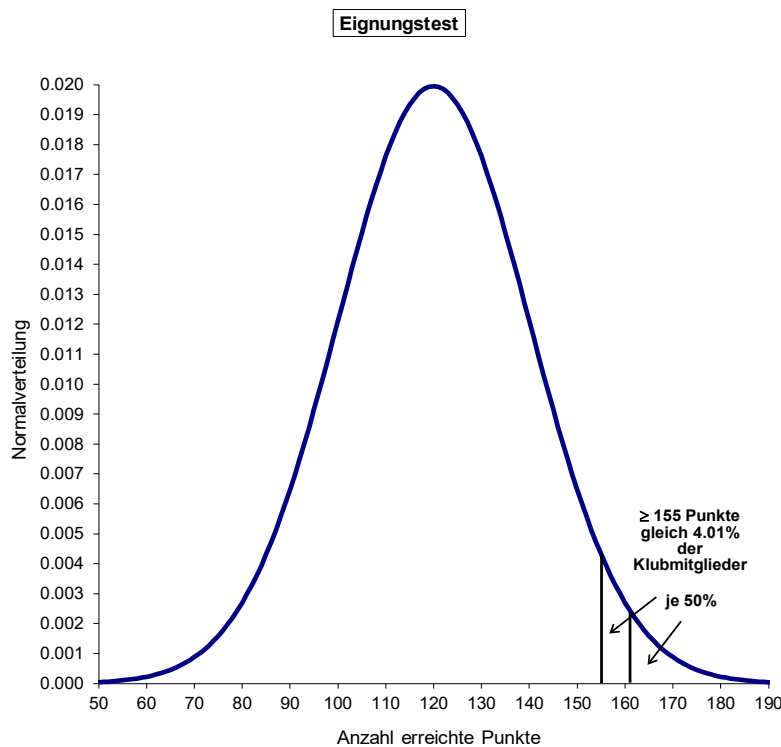
Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Insekt dieser Insektenart, das bereits 110 Tage überlebt hat, auch noch 130 Tage überlebt, beträgt somit:

$$P\left(\frac{B}{A}\right) = \frac{0.0808}{0.2743} = 0.2946 = 29.46\%$$

12.6.3 Klub der Besten (Seite 93)

'X' entspreche der Anzahl erlangter Punkte beim Eignungstest. 'X' ist gemäss obigen Angaben normalverteilt mit den Parametern: arithmetisches Mittel von 120 Punkten und Standardabweichung von 20 Punkten.

Die diesbezügliche Dichtefunktion sieht wie folgt aus:



Die Wahrscheinlichkeit, dass jemand 155 Punkte oder mehr erreicht und somit automatisch Klubmitglied ist, entspricht der Restwahrscheinlichkeit mit folgender Standardvariable:

$z \geq \frac{x-\mu}{\sigma} \geq \frac{155-120}{20} \geq 1.75$, d.h. gemäss Standardnormalverteilungstabelle ergibt dies eine Restwahrscheinlichkeit von: $0.5 - 0.4599 = 0.0401$

Somit hat sind 4.01% der Studierenden automatisch Mitglieder des 'Klubs der Besten'.

Als nächstes ist gefragt, wie gross der Median der Klubmitglieder ist. Letzterer ist bekanntlich derjenige Wert, wo 50% der Vorkommnisse darüber und 50% darunter liegen. Die oben ermittelten 4.01% müssen also halbiert werden.

Wird in der Standardnormalverteilungstabelle für die Restwahrscheinlichkeit von 0.02005 (= 0.47995) die entsprechende Standardvariable 'z' gesucht, ergibt dies (nach Interpolation) den Wert 2.053.

Der Median an erreichten Punkten beim Eignungstest der Klubmitglieder bei dieser Standardvariablen ermittelt sich nun wie folgt:

$$2.053 = \frac{x-120}{20} \Rightarrow x = 20 \cdot 2.053 + 120 = 161.06$$

12.6.4 Alte Verarbeitungsmaschine (Seite 94)

'X' entspreche der Länge der von der alten Verarbeitungsmaschine hergestellten Metallteile. 'X' ist gemäss obigen Angaben normalverteilt mit den Parametern: arithmetisches Mittel von 20 cm und Standardabweichung von '??' cm.

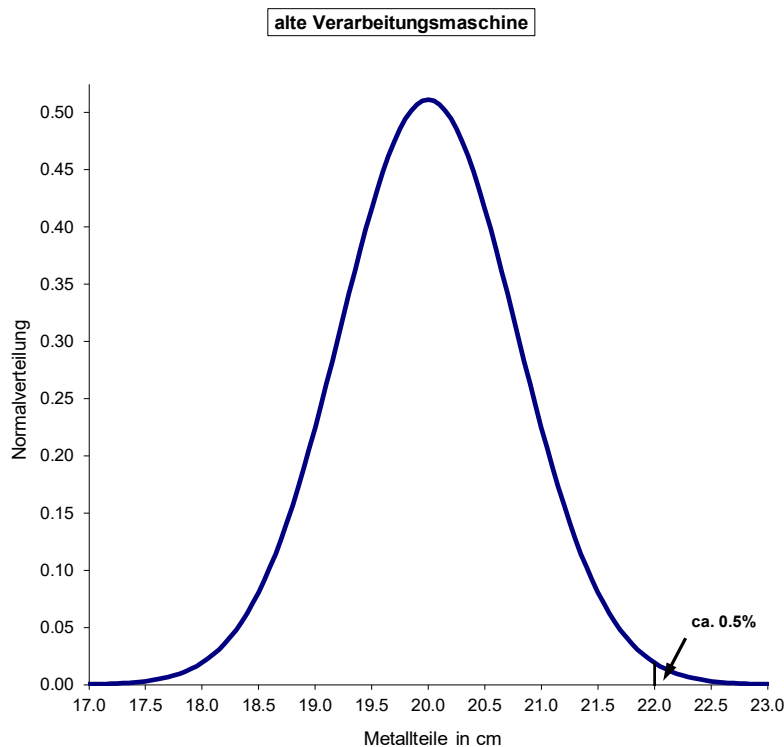
Gemäss den obigen Angaben (10% der von der alten Verarbeitungsmaschine produzierten Metallteile sind weniger als 19 cm lang) kann via die Restwahrscheinlichkeit von 10% (= 0.40) die Standardvariable 'z' (nach Interpolation) gemäss Standardnormalverteilungstabelle ermittelt werden.

Diese beträgt: -1.282

Die Standardabweichung der Normalverteilung der alten Verarbeitungsmaschine kann nun via 'Transformationsformel' wie folgt ermittelt werden:

$$-1.282 = \frac{19 - 20}{\sigma} \Rightarrow \sigma = \frac{-1.0}{-1.282} = 0.780$$

Die diesbezügliche Dichtefunktion sieht wie folgt aus:



Die Wahrscheinlichkeit, dass die Länge der von der alten Verarbeitungsmaschine hergestellten Metallteile 22 cm oder mehr erreichen, entspricht der Restwahrscheinlichkeit mit folgender Standardvariable:

$$z \geq \frac{x - \mu}{\sigma} \geq \frac{22 - 20}{0.780} \geq 2.564 \quad , \text{ d.h. gemäss Standardnormalverteilungstabelle ergibt dies eine Restwahrscheinlichkeit von: } 0.0052 (= 0.4948)$$

In anderen Worten bedeutet dies, dass die Wahrscheinlichkeit, dass die alte Verarbeitungsmaschine Metallteile von über 22 cm produziert, nur knapp über 0.5 Prozent beträgt.

12.6.5 Big Bath Accounting (Seite 94)

H_0 : Es gibt keinen Zusammenhang zwischen dem Big Bath Accounting und einem Top Management Wechsel.

H_1 : Es gibt einen Zusammenhang zwischen dem Big Bath Accounting und einem Top Management Wechsel.

Freiheitsgrad $df = 1 [(2-1) \cdot (2-1)]$

kritischer Wert der Chi-Quadratverteilung = 6.635 (bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 1%)

kritischer Wert der Chi-Quadratverteilung = 3.841 (bei einer Irrtumswahrscheinlichkeit von 5%)

beobachtet

		Top-Mgmt-Wechsel		
		Ja	Nein	
Big Bath Acc.	Ja	3	0	3
	Nein	3	15	18
		6	15	21

erwartet

		Top-Mgmt-Wechsel		
		Ja	Nein	
Big Bath Acc.	Ja	0.8571	2.1429	3
	Nein	5.1429	12.8571	18
		6	15	21

Diff. = (beobachtet - erwartet)

		Top-Mgmt-Wechsel	
		Ja	Nein
Big Bath Acc.	Ja	2.1429	-2.1429
	Nein	-2.1429	2.1429

Diff. quadriert

		Top-Mgmt-Wechsel	
		Ja	Nein
Big Bath Acc.	Ja	4.5918	4.5918
	Nein	4.5918	4.5918

(Diff. quadriert) / erwartet

		Top-Mgmt-Wechsel		Summe aller Zelleninhalte =
		Ja	Nein	
Big Bath Acc.	Ja	5.3571	2.1429	8.75
	Nein	0.8929	0.3571	=> standardisierte Prüfgrösse

Die H_0 -Hypothese kann verworfen werden, weil der errechnete Test-Wert bzw. die standardisierte Prüfgrösse grösser ist als der kritische Wert. Deshalb wird die H_1 -Hypothese angenommen bzw. ein statistisch signifikanter Zusammenhang zwischen dem Big Bath Accounting und einem Top-Management-Wechsel bejaht. [Hinweis: der p-Wert beträgt: 0.31%]

Hinweis: ²⁹⁵Bei der Anwendung des Chi-Quadrat-Tests ist dann Vorsicht geboten, wenn nur zwei Unterscheidungsmerkmale in den Kategorien vorkommen oder wenn mehr als ca. 20% der Anzahl 'Zellen' weniger als fünf (erwartete) Vorkommnisse in der 'Zelle' aufweisen. Bei der vorliegenden Untersuchung treffen beide 'Limitierungen' der Chi-Quadrat-Test-Anwendung zu. Aus diesem Grund wurde auch noch der 'Fisher's Exact Test' mit einem Statistik-Software-Paket durchgeführt. Dieser weist nun einen erhöhten p-Wert von 1.5% auf. Das Vertrauensniveau von 99% wäre anhand dieses Tests nicht mehr erfüllt.

²⁹⁵ siehe MASON, LIND, MARCHAL, 1967, ¹⁰2000, S. 521f.

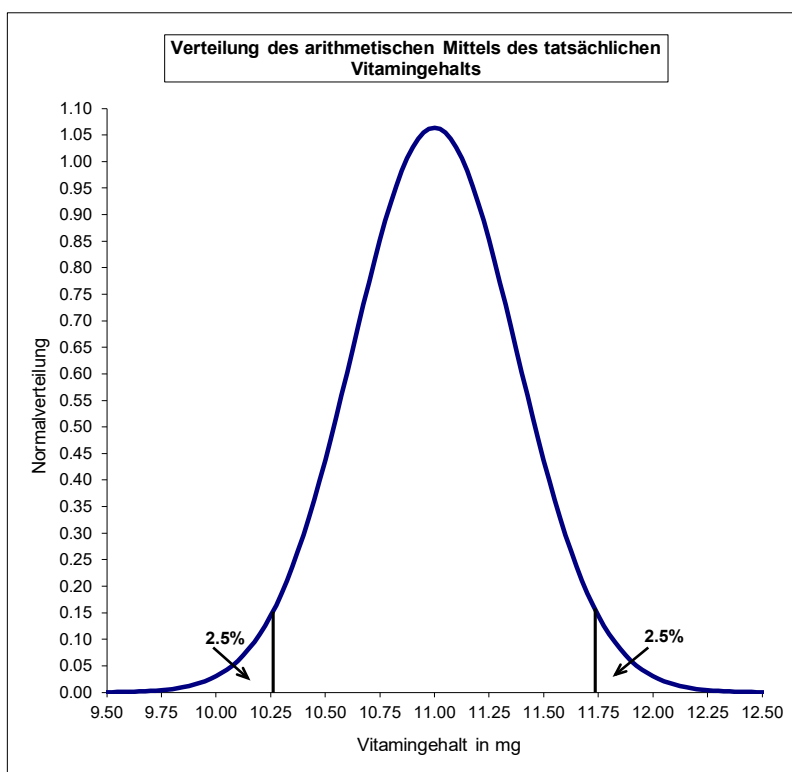
12.7 Aufgaben zu STICHPROBENTHEORIE UND STICHPROBENVERTEILUNGEN

12.7.1 Bestimmung des Vertrauensintervalls des tatsächlichen, durchschnittlichen Vitamingehalts einer bestimmten Speise (Seite 107)

Das Vertrauensintervall für den tatsächlichen, durchschnittlichen Vitamingehalt dieser Speise berechnet sich aufgrund obiger Angaben wie folgt:

$$\mu = \bar{x} \pm \frac{s}{\sqrt{n}} \cdot z = 11 \pm \frac{3}{\sqrt{64}} \cdot z$$

Daraus kann die Dichtefunktion des tatsächlichen, durchschnittlichen Vitamingehalts dieser Speise ermittelt werden. Diese sieht wie folgt aus:



Gemäss den obigen Angaben (95%ige Wahrscheinlichkeit) kann via die Restwahrscheinlichkeit von 2.5% die Standardvariable gemäss Tabelle ermittelt werden. Auf jeder 'Seite' der Standardnormalverteilung müssen also noch die Hälfte von 100% - 95%, also 2,5%, der Restwahrscheinlichkeit möglich sein.

z beträgt somit: +/- 1.96

$$\mu = \bar{x} \pm \frac{s}{\sqrt{n}} \cdot 1.96 = 11 \pm \frac{3}{\sqrt{64}} \cdot 1.96 = 11 \pm 0.735 \text{ mg}$$

Durchschnittliche Vitamingehaltsangabe bei der bestimmten Speise: über 10.265 mg
(Diese Angabe trifft in 97.5% der Fälle zu.)

12.7.2 Automat zur Herstellung von Metallteilen (Seite 107)

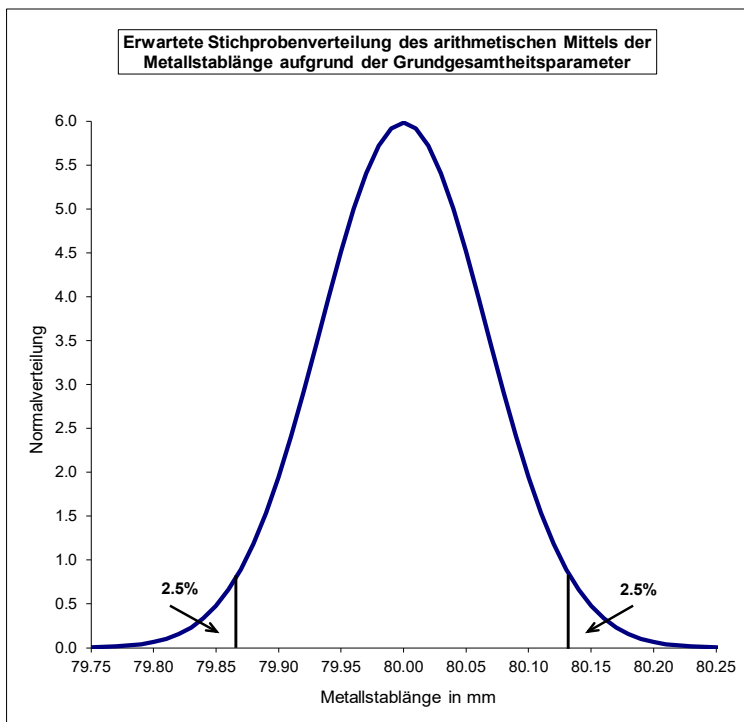
zu erstem Punkt:

Anstelle der üblichen Fragestellung nach der Beantwortung des Vertrauensintervalls des arithmetischen Mittels der Grundgesamtheit wird hier das Vertrauensintervall des Stichprobenmittels verlangt. Letzteres leitet sich wie folgt her:

$$\mu = \bar{x} \pm z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow \bar{x} = \mu \pm z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 80 \pm 1.96 \cdot \frac{0.40}{\sqrt{36}} = 80 \pm 0.1307$$

$$79.8693 \leq \bar{x} \leq 80.1307$$

Die Dichtefunktion des arithmetischen Mittels der Stichprobe aufgrund der Grundgesamtheitsparameter ergibt folgendes Bild:



zu zweitem Punkt:

80.2 mm ist ausserhalb des Vertrauensintervalls, was bedeutet, dass der Automat nicht korrekt bzw. nicht mehr für die Herstellung von Metallstäben mit der durchschnittlichen Länge von 80 mm eingerichtet ist. Unterstellt ist dabei ein Vertrauensintervall von 95%.

Hier könnte aber auch ein Hypothesentest vorgenommen werden. Die Null- und die Alternativ-Hypothese lauten wie folgt:

$$H_0 = \mu = 80 \text{ mm}$$

$$H_1 = \mu \neq 80 \text{ mm}$$

Da die Alternativ-Hypothese via das Ungleichzeichen in beide Richtungen formuliert ist, handelt es sich hier um einen zweiseitigen Test. Der kritische z-Wert ist somit 1.96. Die Test-Statistik ergibt daraus folgend Prüfgrösse:

$$z^* = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{80.2 - 80}{\frac{0.40}{\sqrt{36}}} = \frac{0.2}{0.0667} = 3.0$$

Da die Test-Statistik ausserhalb des kritischen Wertes liegt, also im Ablehnungsbereich, wird die Null-Hypothese abgelehnt und somit die Alternativ-Hypothese angenommen, d.h. der Automat ist nicht mehr korrekt eingestellt.

12.7.3 Bestimmung des Vertrauensintervalls des tatsächlichen, durchschnittlichen Milliliter-Inhalts von 3.5 dl Soft-Drink-Flaschen²⁹⁶ (Seite 108)

Das Vertrauensintervall des durchschnittlichen Milliliter-Inhalts der 3.5-dl-Soft-Drink-Flaschen der Grundgesamtheit berechnet sich aufgrund obiger Angaben wie folgt:

$$\mu = \bar{x} \pm \frac{s}{\sqrt{n}} \cdot t_{(n-1)} = 350.7500 \pm \frac{1.3904}{\sqrt{16}} \cdot t_{(16-1)}$$

Aufgrund der obigen Angaben kann der t-Wert gemäss T-Verteilungs-Tabelle bei zweiseitigem Test und einem Signifikanzniveau von 5% bzw. 1%²⁹⁷ für 'n - 1' Freiheitsgrade (df) ermittelt werden.

$$t_{(n-1)} = t_{(15)} = \pm 2.131 \quad \text{bzw.} \quad \pm 2.947$$

Signifikanzniveau von 5%:

$$\mu = \bar{x} \pm \frac{s}{\sqrt{n}} \cdot t_{(n-1)} = 350.7500 \pm 0.3476 \cdot 2.131 = 350.7500 \pm 0.7407$$

$$350.0093 \leq \mu \leq 351.4907$$

Signifikanzniveau von 1%:

$$\mu = \bar{x} \pm \frac{s}{\sqrt{n}} \cdot t_{(n-1)} = 350.7500 \pm 0.3476 \cdot 2.947 = 350.7500 \pm 1.0244$$

$$349.7256 \leq \mu \leq 351.7744$$

oder gemäss Auswertung von PHStat:²⁹⁸

<u>Vertrauensniveau 95%</u>		<u>Vertrauensniveau 99%</u>	
Sample Standard Deviation	1.3904	Sample Standard Deviation	1.3904
Sample Mean	350.7500	Sample Mean	350.7500
Sample Size	16	Sample Size	16
Confidence Level	95%	Confidence Level	99%
Standard Error of the Mean	0.348	Standard Error of the Mean	0.348
Degrees of Freedom	15	Degrees of Freedom	15
t Value	2.131	t Value	2.947
Interval Lower Limit	350.009	Interval Lower Limit	349.726
Interval Upper Limit	351.491	Interval Upper Limit	351.774

Wenn eine Milliliter-Angabe, z.B. 3.5 dl, an der Flasche angebracht werden soll, wäre aufgrund der vorliegenden Stichprobe das arithmetische Mittel der Grundgesamtheit in rund 2.4% der Fälle unter den 3.5 dl (Achtung: In diesem Fall ist nur ein einseitiger Test gefragt, d.h. kleiner als 3.5 dl).

²⁹⁶ siehe auch UPTON, COOK, 1996, ²1997, S. 392.

²⁹⁷ Signifikanzniveau = (1 - Vertrauensniveau)

²⁹⁸ 'PHStat®' ist eine Add-In-Statistik-Software von Prentice Hall, Inc., zur Tabellenkalkulationssoftware Excel®. Mit PHStat können fast alle in diesem Buch erwähnten 'statistischen' Probleme gelöst werden. Es wird auf der CD-ROM im Lehrbuch von BERENSON, LEVINE kostenlos mitgeliefert.

12.8 Aufgaben zu HYPOTHESENTESTS

12.8.1 Ausschuss-Anteil gut und schlecht eingestellter Maschine (Seite 117)

Lösungsvariante 'Vertrauensintervall':

Das Vertrauensintervall für den tatsächlichen Ausschussanteil der Maschine berechnet sich aufgrund obiger Angaben wie folgt:

$$\pi = p \pm \sqrt{\frac{p \cdot (1 - p)}{n}} \cdot z = \frac{20}{500} \pm \sqrt{\frac{0.04 \cdot 0.96}{500}} \cdot z = 0.04 \pm 0.00876 \cdot z$$

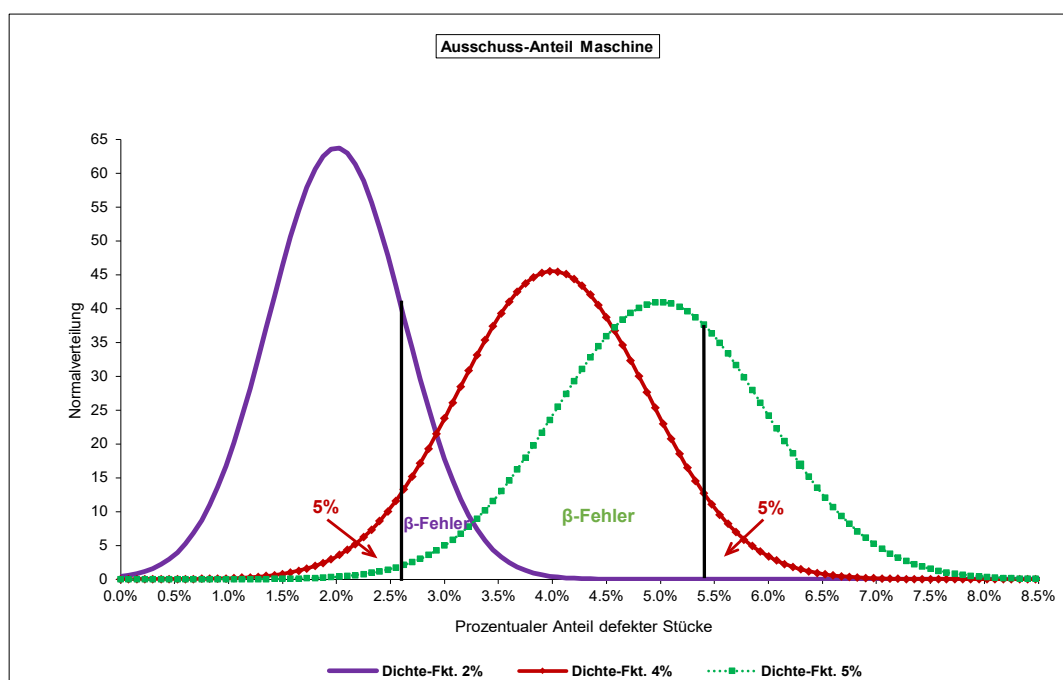
Gemäss den obigen Angaben (Signifikanzniveau von 10%) kann via die Restwahrscheinlichkeit von 5% die Standardvariable gemäss Tabelle ermittelt werden. Auf jeder 'Seite' der Standardnormalverteilung müssen also noch die Hälfte von (100% - 90%), also 5%, der Restwahrscheinlichkeit möglich sein.

z beträgt somit: +/- 1.645

$$\begin{aligned} \pi &= p \pm \sqrt{\frac{p \cdot (1 - p)}{n}} \cdot 1.645 = \frac{20}{500} \pm \sqrt{\frac{0.04 \cdot 0.96}{500}} \cdot 1.645 \\ &= 0.04 \pm 0.00876 \cdot 1.645 = 0.04 \pm 0.01441 \text{ d.h. zwischen 2.559\% und 5.441\%} \end{aligned}$$

Die Maschine ist also eher schlecht eingestellt, da innerhalb des Signifikanzniveaus von 10% die 5%-Marke überschritten, nicht aber die 2%-Marke unterschritten wird. Via den β -Fehler könnte auch argumentiert werden: dieser ist bei der 'Verteilung von 5%' klar über 50%, bei der 'Verteilung von 2%' deutlich unter 50%.

Die Dichtefunktionen bei 2%, 4% und 5% Ausschuss-Anteil der Maschine sehen wie folgt aus:



Lösungsvariante 'Hypothesentest':

Wird die Fragestellung via Hypothesentest angegangen, sind zwei 'Tests' durchzuführen, nämlich bezüglich der Null-Hypothese 2% (gut eingestellte Maschine) oder bezüglich der Null-Hypothese 5% (schlecht eingestellte Maschine). Obwohl aufgrund der Angaben der Fragestellung klar hervorgeht, dass es sich um einen einseitigen Test handelt ($p = 4\%$ ist grösser als 2% und kleiner als 5%), wird hier lediglich aus Konsistenzgründen mit der vorhergehenden Lösungsvariante 'Vertrauensintervall' ein zweiseitiger Test unterstellt.

Fall 'gut eingestellte Maschine':

$$H_0 = \pi = 0.02$$

$$H_1 = \pi \neq 0.02$$

Der kritische z-Wert entspricht bei einem Signifikanzniveau von 10% +/- 1.645.

Die Test-Statistik berechnet sich wie folgt:

$$z^* = \frac{p - \pi}{\sqrt{\frac{\pi \cdot (1 - \pi)}{n}}} = \frac{0.04 - 0.02}{\sqrt{\frac{0.02 \cdot 0.98}{500}}} = \frac{0.02}{0.006261} = 3.194$$

Da die Test-Statistik grösser als der (positive) kritische Wert von +1.645 ist, wird die Null-Hypothese verworfen, d.h. es liegt keine gut eingestellte Maschine vor.

Fall 'schlecht eingestellte Maschine':

$$H_0 = \pi = 0.05$$

$$H_1 = \pi \neq 0.05$$

Der kritische z-Wert entspricht bei einem Signifikanzniveau von 10% wiederum +/- 1.645.

Die Test-Statistik berechnet sich wie folgt:

$$z^* = \frac{p - \pi}{\sqrt{\frac{\pi \cdot (1 - \pi)}{n}}} = \frac{0.04 - 0.05}{\sqrt{\frac{0.05 \cdot 0.95}{500}}} = \frac{-0.01}{0.009747} = -1.0260$$

Da die Test-Statistik zwischen den beiden kritischen Wert von +/- 1.645 liegt, wird die Null-Hypothese nicht verworfen, d.h. es liegt eine schlecht eingestellte Maschine vor.

Quintessenz:

Beide Lösungsvarianten führen zum gleichen 'Ergebnis'. Es zeigt sich hier sehr deutlich, dass sowohl via das Vertrauensintervall bzw. den Hypothesentest eigentlich die gleiche Frage 'getestet' wird, lediglich die Vorgehensweise ist unterschiedlich.

12.8.2 'Test' über besseres Management (Seite 117)

zu erstem Punkt:

Die Alternativ-Hypothese ist meistens die Aussage, die man am liebsten hätte, wenn sie eintrifft. Die Null-Hypothese (bzw. die Hypothese, die getestet werden soll) ist somit diejenige Aussage, die man hofft, dass sie nicht zutrifft, d.h. die Null-Hypothese testet meistens den Grundgesamtheitsparameter.

Im vorliegenden Beispiel sind die Null- und Alternativ-Hypothese wie folgt zu definieren:

$$H_0: \mu \leq 19$$

$$H_1: \mu > 19$$

Unter der Annahme, dass der EBIT normalverteilt, die Standardabweichung der Grundgesamtheit nicht bekannt, dies ein einseitiger Test und das Signifikanzniveau 5% ist, gilt folgender kritische Wert gemäss T-Verteilungs-Tabelle:

$$t_{(n-1)} = t_{(5)} = 2.015$$

Wird dieser kritische Wert von der Test-Statistik überschritten, dann kann die Nullhypothese verworfen werden, ansonsten nicht.

Die Test-Statistik sieht wie folgt aus

$$t_{(n-1)} = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} = \frac{25 - 19}{\frac{8}{\sqrt{6}}} = \frac{6}{3.266} = 1.8371$$

Da die Test-Statistik von rund 1.84 den kritischen Wert von 2.015 nicht übersteigt, kann die Null-Hypothese bei einem Signifikanzniveau 5% nicht verworfen, bzw. muss 'bejaht' werden. Dies bedeutet hier, dass die Aussage des Managements, statistisch nicht untermauert werden kann, d.h. der durchschnittliche EBIT von CHF 25 Mio. kann auch rein zufällig bei einem Grundgesamtheitsdurchschnitt des EBIT von CHF 19 Mio. entstanden sein.

zu zweitem Punkt:

Wird in der T-Verteilungs-Tabelle bei 5 Freiheitsgraden (df = 5) horizontal von links nach rechts 'gefahren', so sieht man, dass der T-Wert bei einem Signifikanzniveau von 10% (einseitiger Test) 1.476 beträgt. Bei einem Signifikanzniveau von 10% würde also die Null-Hypothese verworfen, d.h. die Alternativ-Hypothese bzw. die Aussage des Managements würde bejaht: der durchschnittliche EBIT von CHF 25 Mio. des letzten Konjunkturzyklus' würde sich statistisch vom langfristigen EBIT-Durchschnitt von CHF 19 Mio. aller vorangehenden Konjunkturzyklen abheben.

Da die Test-Statistik von 1.8371 näher beim T-Wert von 5% Signifikanzniveau liegt und weiter weg von demjenigen von 10%, müsste das Signifikanzniveau 'nur' wenig mehr als 5% festgelegt werden, damit der Entscheid 'umgekippt' würde. Bei einem Signifikanzniveau von 6.28% kann die Aussage des Managements weder bejaht, noch verneint werden.

12.8.3 Industrie-Teppich (Seite 118)

zu erstem Punkt:

Das Vertrauensintervall des durchschnittlichen Haltbarkeits-Index der Stichprobe berechnet sich wie folgt:

$$\mu = \bar{x} + z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{oder} \quad \bar{x} = \mu + z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{bzw.} \quad \bar{x} = 500 + z \cdot \frac{150}{\sqrt{36}}$$

Gemäss der obigen Angabe soll das Vertrauensniveau 95% sein. Dies bedeutet umgekehrt formuliert ein Signifikanzniveau von 5% [α -Fehler oder auch 'Produzentenrisiko' genannt]. Bei einem einseitigen Test (hier verlangt) kann die Standardvariable 'z' gemäss Standardnormalverteilungstabelle ermittelt werden. Dieses 'z' beträgt somit: 1.645

$$\bar{x} = \mu + z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{bzw.} \quad \bar{x} = 500 + 1.645 \cdot \frac{150}{\sqrt{36}} = 541.125$$

Der durchschnittliche Haltbarkeits-Index der Stichprobe müsste mehr als 541.125 Punkte aufweisen, damit mit einem Vertrauensniveau von 95% ausgesagt werden kann, dass der neu entwickelte Teppich-Typ eine grössere durchschnittliche Haltbarkeit als die bisher produzierten Industrie-Teppiche aufweist.

zu zweitem Punkt:

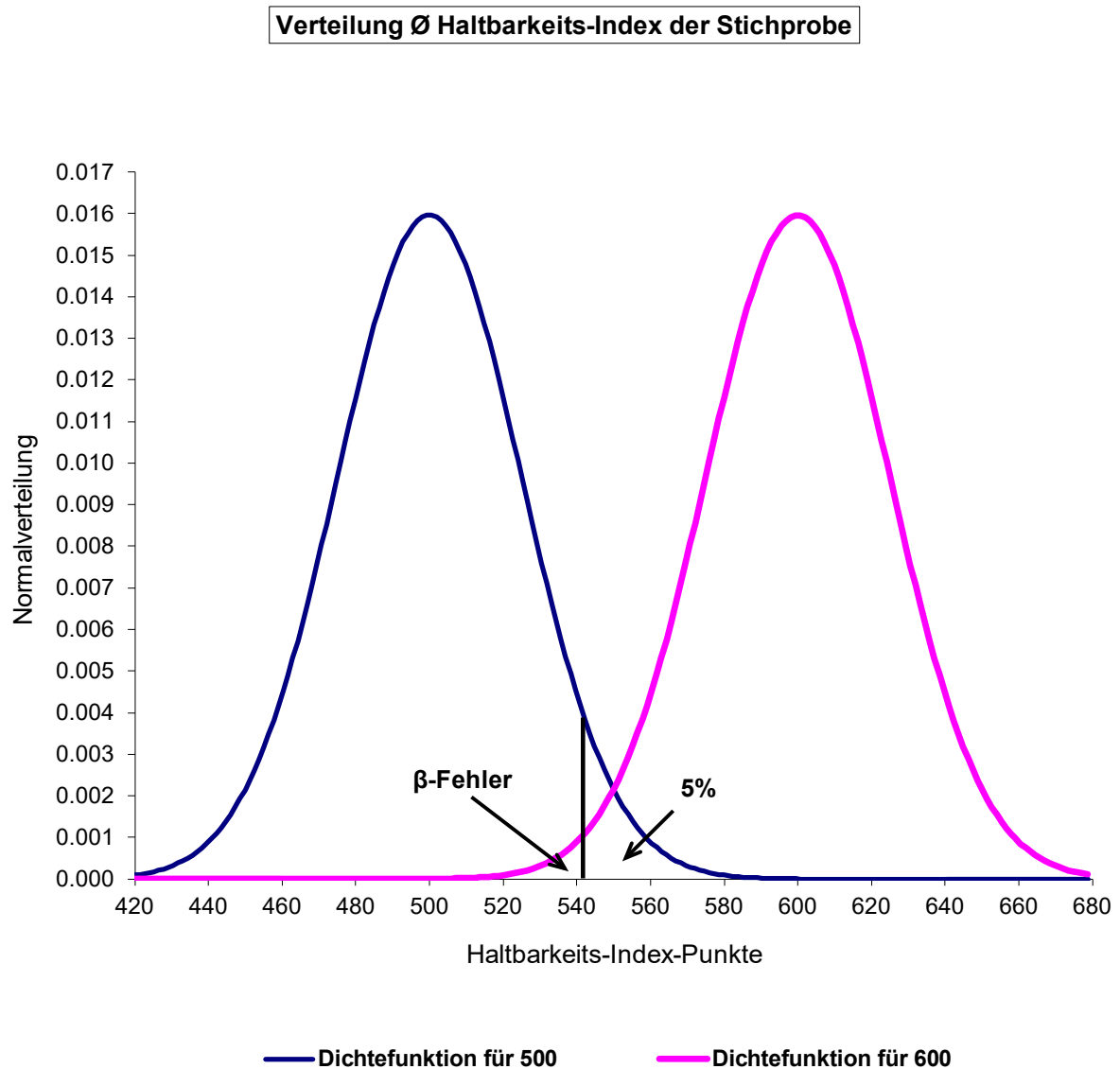
Die Wahrscheinlichkeit für den Konsumenten berechnet sich aufgrund obiger Angaben wie folgt (dies entspricht auch der Berechnung der Test-Statistik):

$$\bar{x} = \mu + z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \Rightarrow z \Rightarrow z^* = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} = \frac{541.125 - 600}{\frac{150}{\sqrt{36}}} = -2.355$$

Gemäss Tabelle der Standardnormalverteilung entspricht dies einer (interpolierten) Restwahrscheinlichkeit von 0.00925 (= 0.5 - 0.49075) [bei $z = -2.355$].

Bei einem Stichprobenmittel von 541.125 wäre die Wahrscheinlichkeit für die Konsumenten, dass die durchschnittliche Haltbarkeit des Teppichs nicht den von der F&E-Abteilung angegebenen Parametern des neu entwickelten Teppich-Typs entspricht 0.925% [β -Fehler oder auch 'Konsumentenrisiko' genannt].

Die Dichtefunktionen der Stichprobenmittel sehen wie folgt aus:



12.9 Aufgaben zu REGRESSION UND KORRELATION

12.9.1 Problemstellung aus der Kostenrechnung (Seite 143)

an Kunden verrechnete, monatliche Beraterstunden (in Arbeits-Std.) X	Total monatliche Gemeinkosten (in CHF) Y	$(X - \bar{X})$	$(Y - \bar{Y})$	$[(X - \bar{X}) \cdot (Y - \bar{Y})]$	$(X - \bar{X})^2$	$(Y - \bar{Y})^2$
2'800	630'000	-3'000	-230'000	690'000'000	9'000'000	52'900'000'000
4'300	750'000	-1'500	-110'000	165'000'000	2'250'000	12'100'000'000
5'600	820'000	-200	-40'000	8'000'000	40'000	1'600'000'000
6'200	890'000	400	30'000	12'000'000	160'000	900'000'000
7'400	980'000	1'600	120'000	192'000'000	2'560'000	14'400'000'000
8'500	1'090'000	2'700	230'000	621'000'000	7'290'000	52'900'000'000
$\Sigma =$ 34'800	$\Sigma =$ 5'160'000			$\Sigma =$ 1'688'000'000	$\Sigma =$ 21'300'000	$\Sigma =$ 134'800'000'000
$\bar{X} =$ 5'800	$\bar{Y} =$ 860'000					

b = Regressionskoeffizient (oder Steigung) =

79.2488 CHF pro monatliche Beraterstunde

a₀ = Regressionskonstante (oder Achsenabschnitt) =

400'356.81 CHF bei Null monatlichen Beraterstunden (nur für relevanten Bereich gültig!)

Zu Punkt 1:

Die Gemeinkosten Y' als lineare Funktion der an die Kunden verrechneten Beraterstunden X:

$$Y' = 400'356.81 + 79.2488 X$$

Zu Punkt 2:

r = Korrelationskoeffizient nach Bravais-Pearson =

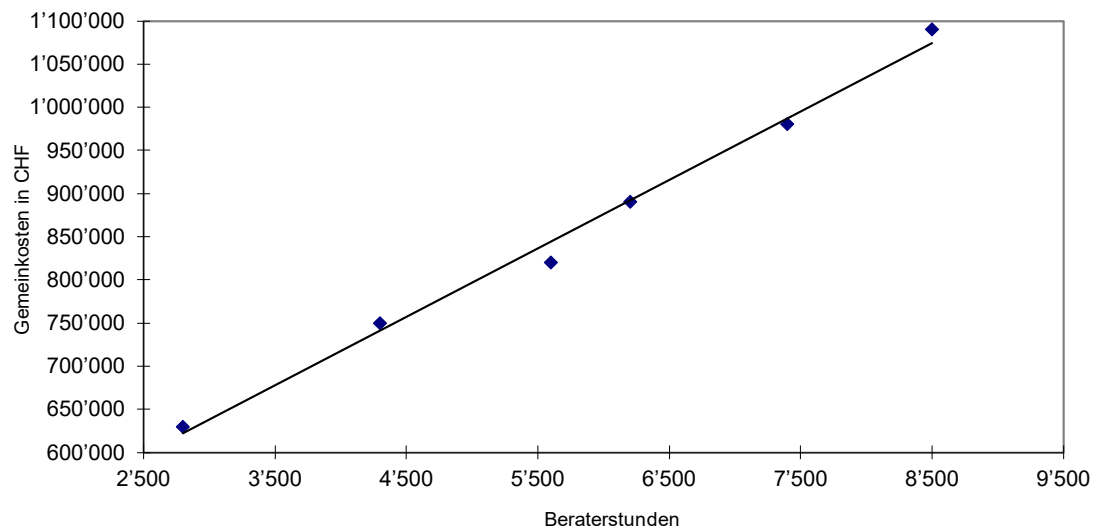
0.9962

r² = Determinationskoeffizient =

0.9924

bzw.

99.24%



12.9.2 Problemstellung aus dem Absatzbereich (Seite 143)

zu erstem Punkt:

Jahr	Verkaufsmenge (in 1'000 Stk.)					
X	Y	$(X - \bar{X})$	$(Y - \bar{Y})$	$[(X - \bar{X}) \cdot (Y - \bar{Y})]$	$(X - \bar{X})^2$	$(Y - \bar{Y})^2$
1	1'500	-2.50	-800.00	2'000.00	6.25	640'000.00
2	1'700	-1.50	-600.00	900.00	2.25	360'000.00
3	2'200	-0.50	-100.00	50.00	0.25	10'000.00
4	2'300	0.50	0.00	0.00	0.25	0.00
5	2'800	1.50	500.00	750.00	2.25	250'000.00
6	3'300	2.50	1'000.00	2'500.00	6.25	1'000'000.00
$\Sigma = 21$	$\Sigma = 13'800$			$\Sigma = 6'200.00$	$\Sigma = 17.50$	$\Sigma = 2'260'000.00$
$\bar{X} = 3.50$	$\bar{Y} = 2'300.00$					

b = Regressionskoeffizient (oder Steigung) =

354.28571 TStk. pro zusätzlichem Jahr

a₀ = Regressionskonstante (oder Achsenabschnitt) =

1'060.000 TStk. bei Jahr Null bzw. 19.6

Die Verkaufsmenge Y' (in Stk.) als lineare Funktion der Anzahl Jahre (seit Jahr Null bzw. 2017) X:

$$Y' = 1'060'000 + 354'285.71 X$$

Die Verkaufsmenge in Stk. für das Jahr 2024:

3'540'000

Der Verkaufsumsatz in CHF für das Jahr 2024 bei keiner Preisveränderung:

7'788'000.00

zu zweitem Punkt:

r = Korrelationskoeffizient nach Bravais-Pearson =

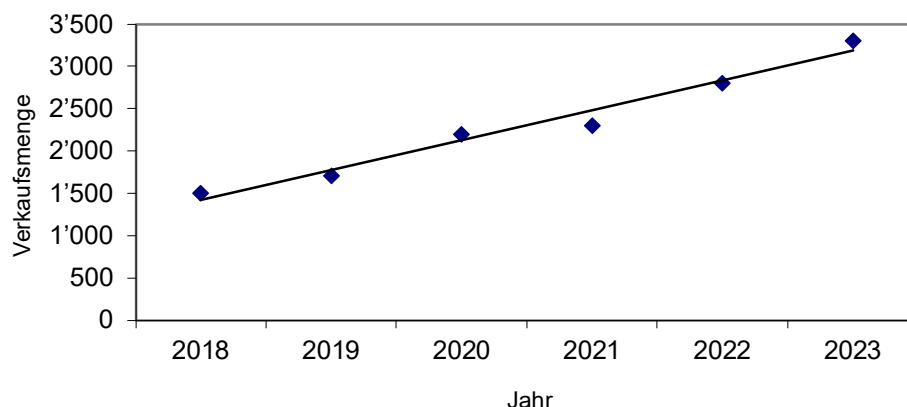
0.9859

r² = Determinationskoeffizient =

0.9719

bzw.

97.19%



Die Ausgangsdatenbasis weist darauf hin, dass die Verkaufsmenge mehr oder weniger unabhängig vom jeweiligen Verkaufspreis über die sechs Jahre hinweg ansteigt. Aus diesem Grund wurde die Regression zwischen 'Zeit' und 'Verkaufsmenge' gewählt.

12.9.3 Zusammenhang von Reparaturkosten und Alter bei PKW's (Seite 144)

Alter der PKW's in Jahren X	Reparatur- kosten p.a. in CHF Y	$(X - \bar{X})$	$(Y - \bar{Y})$	$[(X - \bar{X}) \cdot (Y - \bar{Y})]$	$(X - \bar{X})^2$	$(Y - \bar{Y})^2$
1.00	1'300.00	-1.65	-1'860.00	3'069.00	2.7225	3'459'600.00
1.50	1'900.00	-1.15	-1'260.00	1'449.00	1.3225	1'587'600.00
2.00	2'800.00	-0.65	-360.00	234.00	0.4225	129'600.00
2.25	2'800.00	-0.40	-360.00	144.00	0.1600	129'600.00
2.50	3'200.00	-0.15	40.00	-6.00	0.0225	1'600.00
3.00	3'500.00	0.35	340.00	119.00	0.1225	115'600.00
3.25	3'500.00	0.60	340.00	204.00	0.3600	115'600.00
3.50	3'900.00	0.85	740.00	629.00	0.7225	547'600.00
3.50	4'200.00	0.85	1'040.00	884.00	0.7225	1'081'600.00
4.00	4'500.00	1.35	1'340.00	1'809.00	1.8225	1'795'600.00

$$\bar{X} = 2.65 \quad \bar{Y} = 3'160.00$$

$$\Sigma = 8'535.00 \quad \Sigma = 8.4000 \quad \Sigma = 8'964'000.00$$

Zu erstem Punkt:

Altersabhängige Kosten $b =$ **1'016.07**
in CHF pro Jahr

'Fixe' Kosten $a_0 =$ **467.41** (nur im relevanten Bereich gültig!)
in CHF

Zu zweitem Punkt:

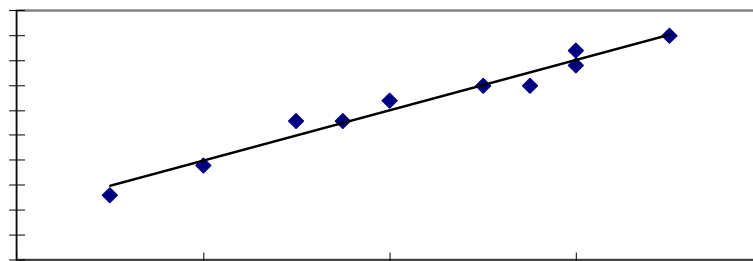
Korrelationskoeffizient $r =$ **0.9836**

Es besteht ein sehr enger gleichläufiger linearer statistischer Zusammenhang.

Determinationskoeffizient $r^2 =$ 96.7% können durch die lineare Regressionsfunktion statistisch 'erklärt' werden.

Zu drittem Punkt:

durchschnittliche jährliche Reparaturkosten (in CHF)
eines drei Jahre alten PKW's $=$ **3'515.63**



12.9.4 Zusammenhang Werbeaufwand und Absatz (Seite 145)

Softdrink	X	Y	$(X - \bar{X})$	$(Y - \bar{Y})$	$[(X - \bar{X}) \cdot (Y - \bar{Y})]$	$(X - \bar{X})^2$	$(Y - \bar{Y})^2$
A	21	664	6.0	333.0	1'998.0	36.0	110'889.0
B	17	406	2.0	75.0	150.0	4.0	5'625.0
C	21	368	6.0	37.0	222.0	36.0	1'369.0
D	20	324	5.0	-7.0	-35.0	25.0	49.0
E	14	254	-1.0	-77.0	77.0	1.0	5'929.0
F	8	228	-7.0	-103.0	721.0	49.0	10'609.0
G	9	210	-6.0	-121.0	726.0	36.0	14'641.0
H	10	194	-5.0	-137.0	685.0	25.0	18'769.0
$\sum = 120.0$ $\bar{X} = 15.0$			$\sum = 2'648.0$ $\bar{Y} = 331.0$		$\sum = 4'544.0$	$\sum = 212.0$	$\sum = 167'880.0$

Steigung $b =$ 21.43 (1'000) hl pro eine Mio. CHF Werbeaufwand

Achsenabschnitt $a_0 =$ 9.49 (1'000) hl Softdrink bei Null CHF Werbeaufwand

Korrelationskoeffizient $r =$ 0.7617

Determinationskoeffizient $r^2 =$ 0.5802 bzw. 58.02%

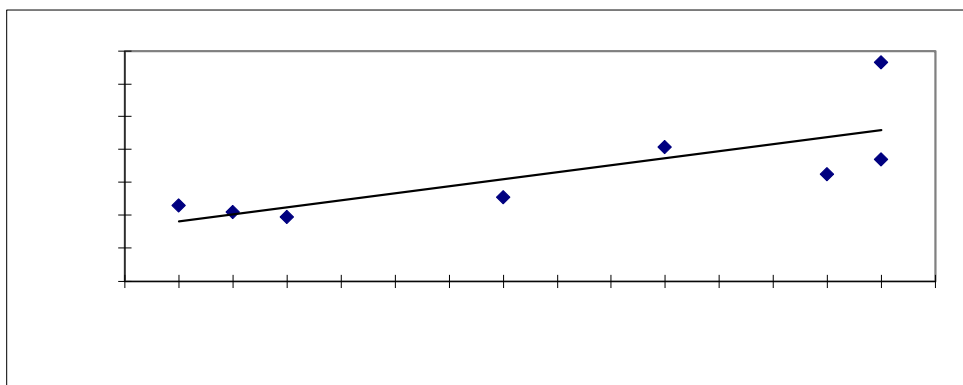
Zu erstem Punkt:

Der Absatz an Softdrink (in 1'000 hl) wird durch den Werbeaufwand (in Mio. CHF) wie folgt beeinflusst

$$\begin{array}{rclclcl}
 Y & = & a_0 & + & b & \cdot & X \\
 \text{Absatz} & = & 9.49 & \text{plus} & 21.43 & \text{mal} & \text{Mio. CHF} \\
 \uparrow & & \uparrow & & \uparrow & & \text{Werbeaufwand} \\
 \text{in 1'000 hl} & & \text{(1'000) hl Softdrink} & & \text{(1'000) hl pro} & & \\
 & & \text{bei Null CHF} & & \text{eine Mio. CHF} & & \\
 & & \text{Werbeaufwand} & & \text{Werbeaufwand} & &
 \end{array}$$

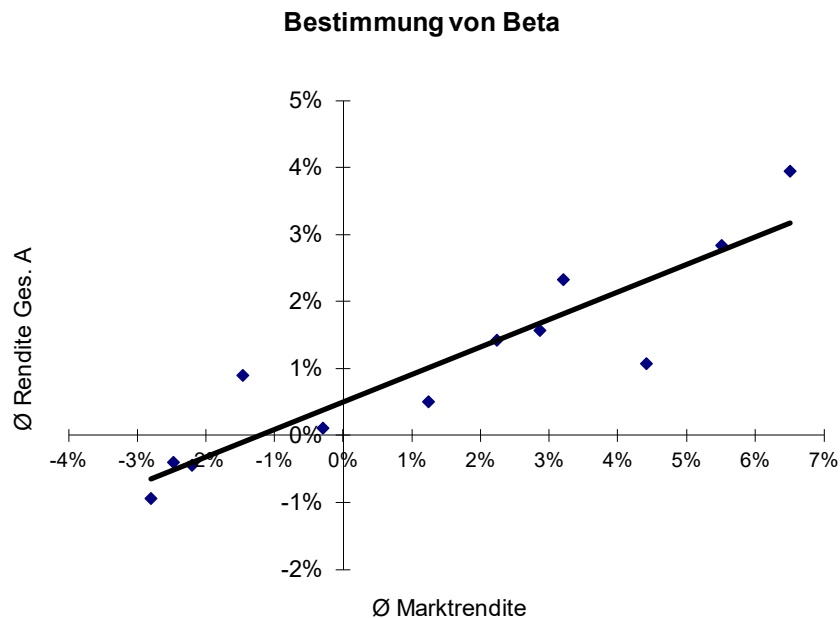
Zu zweitem Punkt:

Der Korrelationskoeffizient von rund 0.76 für die 8 Softdrinks zeigt einen ausgeprägt positiven linearen statistischen Zusammenhang zwischen dem Produktionsausstoss und dem Werbeaufwand. Durch die lineare Regression können aber (nur) rund 58% erklärt werden.



12.9.5 CAPM (Seite 146)

Streudiagramm:



Ermittlung Beta (β) und die risikolose Rendite (R_f) gemäss CAPM:

Als erster Schritt muss die CAPM-Formel etwas umgestellt werden:

$$R_i = R_f + \beta_i \cdot [R_M - R_f] \Rightarrow R_i = R_f \cdot (1 - \beta_i) + \beta_i \cdot R_M$$

Dadurch wird klar ersichtlich, dass der CAPM-Zusammenhang anhand einer Regressionsgeraden dargestellt werden kann. Dabei sei 'X' ist die Marktrendite (R_M), 'Y' die Rendite der Gesellschaft A (R_i), 'a₀' der Ausdruck [$R_f \cdot (1 - \beta_i)$] und 'b' gleich dem β_i .

Nach der Methode der kleinsten Quadrate ergibt dies folgende Werte für 'b' und 'a₀':

$$b = \frac{\sum[(X - \bar{X}) \cdot (Y - \bar{Y})]}{\sum(X - \bar{X})^2} = \frac{\text{cov}_{XY}}{s_X^2} = \frac{0.004702}{0.011484} = 0.4095$$

$$a_0 = \bar{Y} - b \cdot \bar{X} = 0.0107 - 0.4095 \cdot 0.0140 = 0.0050$$

Das Beta von 0.4095 besagt, dass die Gesellschaft A ein kleineres Risiko als das Markt-Portefeuille aufweist ($\beta < 1$). Aus diesem Grund ist es auch gerechtfertigt, dass Gesellschaft A eine entsprechend der CAPM-Funktion niedrigere Rendite aufweist. Für den Betrachtungszeitraum würde dies bedeuten, dass die Gesellschaft A - entsprechend dem CAPM - folgende durchschnittliche, monatliche Rendite aufweisen müsste:

$$R_i = R_F + \beta_i \cdot [R_M - R_F] \Rightarrow R_i = 0.0055 + 0.4095 \cdot [0.014 - 0.0055] = 0.0090 = 0.9\%$$

Tatsächlich weist Gesellschaft A aber eine durchschnittliche, monatliche Rendite von 1.07% auf; also monatlich 0.17% mehr als vom CAPM 'gefordert'. Gesellschaft A rentierte somit besser als erwartet.

Zum gleichen Resultat gelangt man auch über folgende Vorgehensweise:

Wird das berechnete ' a_0 ' mit dem Ausdruck $[R_F \cdot (1 - \beta_i)]$ verglichen, wobei bei letzterem Ausdruck die Zusatzangabe betreffend der risikolosen Monats-Rendite für R_F verwendet wird, erhält man eine Performance-Kennzahl für die Gesellschaft A (mindestens bezüglich dem CAPM). Da es sich bei den Daten um durchschnittliche Monatsrenditen handelt, muss auch die risikolose Rendite auf Monatsbasis umgerechnet werden, d.h. $(1 + \text{Jahres-Rendite}) = (1 + \text{Monats-Rendite})^{12}$.

- Wenn ' a_0 ' $> [R_F \cdot (1 - \beta_i)]$, dann hat die Gesellschaft A im Betrachtungszeitraum besser rentiert als erwartet;
- Wenn ' a_0 ' $= [R_F \cdot (1 - \beta_i)]$, dann hat die Gesellschaft A im Betrachtungszeitraum wie erwartet rentiert;
- Wenn ' a_0 ' $< [R_F \cdot (1 - \beta_i)]$, dann hat die Gesellschaft A im Betrachtungszeitraum schlechter rentiert als erwartet.

Im obigen Fall ergibt der Ausdruck $[R_F \cdot (1 - \beta_i)] \Rightarrow [0.0055 \cdot (1 - 0.4095)] = 0.0032$. Dies bedeutet, dass die Gesellschaft A im Betrachtungszeitraum um monatlich 0.17% (abgerundet) $[= a_0 - R_F \cdot (1 - \beta_i)]^{299}$ besser rentiert hat als erwartet (2.1% p.a.).

Aussage über die 'Güte':

Die 'Güte' der Regression kann anhand des Determinationskoeffizienten berechnet werden:

$$r^2 = \left[\frac{\sum[(X - \bar{X}) \cdot (Y - \bar{Y})]}{\sqrt{\sum(X - \bar{X})^2 \cdot \sum(Y - \bar{Y})^2}} \right]^2 = \left[\frac{0.00472}{\sqrt{0.011484 \cdot 0.002310}} \right]^2 = 0.9164^2 = 0.8398$$

Der Determinationskoeffizient ist sehr hoch, was einerseits eine grosse 'Güte' der Regressionsgeraden darstellt, andererseits aber im CAPM aussagt, dass rund 84% des Risikos (Varianz) der Gesellschaft A marktspezifisch ist und nur 16% firmenspezifisch. Das letztere Risiko sollte durch Diversifizierung des Portefeuilles des Investors eliminiert werden können.

²⁹⁹ Dies wird auch 'Jensen's alpha' genannt (siehe DAMODARAN, 1997, ²2001, S. 197.).

12.9.6 Kundenauftrag (Seite 148)

Es sind eine Vielzahl von Interpretationen möglich:

- Der Determinationskoeffizient r^2 beträgt 0.9771. Dies bedeutet, dass die Regressionsgerade mit den geschätzten Koeffizienten rund 98% der Streuung der Kosten (total) von Monat zu Monat durch die Anzahl hergestellter Einheiten erklärt wird, bzw. weniger als 2% auf nicht im Modell erklärte Einflussfaktoren zurückzuführen ist. Wir haben somit ein gutes Erklärungs-Modell der Kosten (total) vor uns. Diese Aussage wird auch durch die sehr hohe F -Statistik bzw. -Prüfgrösse von 426.71 (siehe Auswertungen) untermauert. Die 'Güte' der Regression ist somit sehr gut, bzw. der Regressionskoeffizient 'Anzahl hergestellte Einheiten' unterscheidet sich klar von Null.
- Trotz der positiven Aussage über das Modell, ist eine gewisse Vorsicht bei der Interpretation der Beziehung zwischen der Anzahl hergestellter Einheiten und den Kosten (total) angebracht. Eine lineare Regression nach der Methode der kleinsten Quadrate kann weder den effektiven kausalen Zusammenhang testen noch garantieren, dass der geschätzte Zusammenhang auch in der Zukunft oder bei einem Output, der ausserhalb des beobachteten bzw. relevanten Bereichs liegt, noch gültig sein wird. Diese Überlegungen sollten aber vom Entscheidungsträger angestellt werden, der auch über das geeignetste Modell für die Entscheidungsfindung befinden muss.
- Der Achsenabschnitt (= Fixkosten) beträgt CHF 1'316.69, die Steigung (= variable Kosten je hergestellte Einheit) CHF 27.27. Diese Aussage betreffend Fixkosten und variablen Kosten kann selbstverständlich nur im hier beobachteten bzw. relevanten Bereich von ca. 500 bis 650 hergestellten Einheiten gemacht werden.
- Wir können auch eine Schätzung des Vertrauensintervalls dieser Koeffizienten abgeben: Der kritische t -Wert bei einem zweiseitigen Test mit 10 Freiheitsgraden (df) und einem Signifikanzniveau von 5% beträgt 2.228. Die in den Auswertungen berechnete t -Statistik liegt lediglich beim Koeffizienten der Steigung (20.657) über diesem kritischen t -Wert, nicht aber beim Achsenabschnitt (1.783). Somit kann lediglich ausgesagt werden, dass sich der Koeffizient der Steigung signifikant (bei einem Signifikanzniveau von 5%) von Null unterscheidet, nicht aber der Koeffizient des Achsenabschnittes. Letzteres zeigt sich auch darin, dass der p -Wert beim Koeffizienten des Achsenabschnittes 10.5% beträgt und die untere Vertrauensintervallgrenze (wiederum bei einem Vertrauensniveau von 95%) negativ ist.
Für die variablen Kosten (Steigung) kann somit gesagt werden, dass sich diese mit 95% Wahrscheinlichkeit im Bereich von CHF 24.33 und CHF 30.21 befinden werden (siehe Vertrauensintervallgrenzen beim Koeffizienten der Steigung in den Auswertungen). Mit dieser Art der Analyse können wir abschätzen, wie gross die Wahrscheinlichkeit ist, dass wir beim neuen Kundenauftrag einen positiven Deckungsbeitrag (Preis minus variable Kosten) erwirtschaften.
- Kehren wir die oben gemachte Vorgehensweise bezüglich der Schätzung des Vertrauensintervalls um, können wir ermitteln, wie gross die Wahrscheinlichkeit ist, dass wir keinen Deckungsbeitrag aus dem neuen Kundenauftrag erzielen, d.h. wenn die variablen Kosten grösser sind als die CHF 32.00, die der Kunde gewillt ist zu zahlen. Der kritische t -Wert beträgt dabei 3.585 $[(32.00 - 27.268) / 1.320 \text{ ('Standardfehler')}]$, was einer Wahrscheinlichkeit (einseitiger Test bei 10 Freiheitsgraden) von **nur** 0.25% entspricht; bei CHF 28.00 betragen die Werte 0.555 $[(28.00 - 27.268) / 1.320 \text{ ('Standardfehler')}]$ und 29.6%.
- Aus den Auswertungen können auch die oberen und unteren Vertrauensintervallgrenzen (bei 5%igem Signifikanzniveau) der 'wahren' Einzelprognose (Kosten (total)) bei 600, 625 und 650 hergestellten Einheiten herausgelesen werden. Daraus kann z.B. folgende Aussage gemacht werden: mit 95%iger Wahrscheinlichkeit werden sich die Kosten (total) bei 600 hergestellten Einheiten zwischen CHF 17'182.78 und CHF 18'172.79 bewegen und bei 650 hergestellten Einheiten zwischen CHF 18'490.50 und CHF 19'591.92.
Gehen wir davon aus, dass sich die Kosten (total) an der oberen Vertrauensintervallgrenze befinden werden, so ergibt dies für die 50 zusätzlich hergestellten Einheiten des Kundenauftrages Mehrkosten von CHF 1'419.13 (CHF 19'591.92 minus CHF 18'172.79). Diesen Mehrkosten können die zusätzlichen Einnahmen aus dem Kundenauftrag von CHF 1'600.00 (50 Einheiten à CHF 32.00) gegenübergestellt werden. Der Deckungsbeitrag des Kundenauftrages wäre dann CHF 180.87.

12.10 Aufgaben zu 'Klassische' Zeitreihenzerlegung

12.10.1 Umsatzentwicklung eines Käseproduzenten (Seite 173)

zu erstem Punkt: Saisonkomponenten ohne Korrektur(wert)

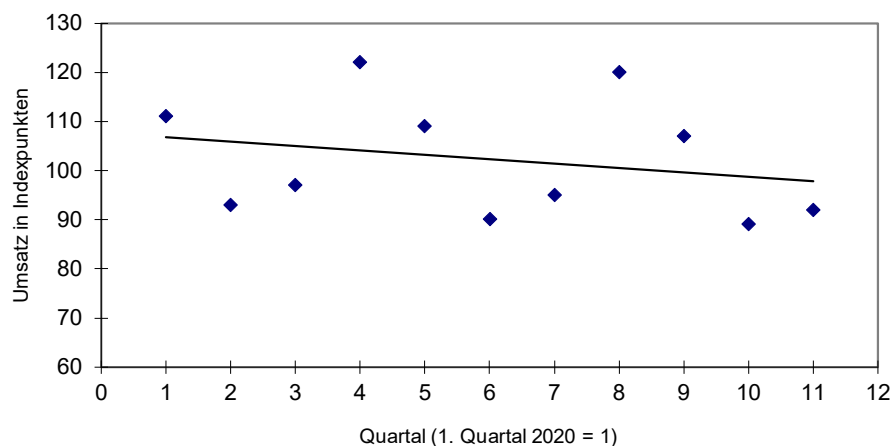
Jahr	Abweichungen (Umsatz - Trendwerte) pro Quartal				Queraddition
	I	II	III	IV	
2020	4.23	-12.87	-7.97	17.93	
2021	5.83	-12.27	-6.37	19.53	
2022	7.43	-9.67	-5.77		
$\bar{X} =$	5.83	-11.60	-6.70	18.73	6.26

Saisonkomponente Quartal I :**5.83**.....
 Saisonkomponente Quartal II :**-11.60**.....
 Saisonkomponente Quartal III :**-6.70**.....
 Saisonkomponente Quartal IV :**18.73**.....

zu zweitem Punkt: Korrekturwert

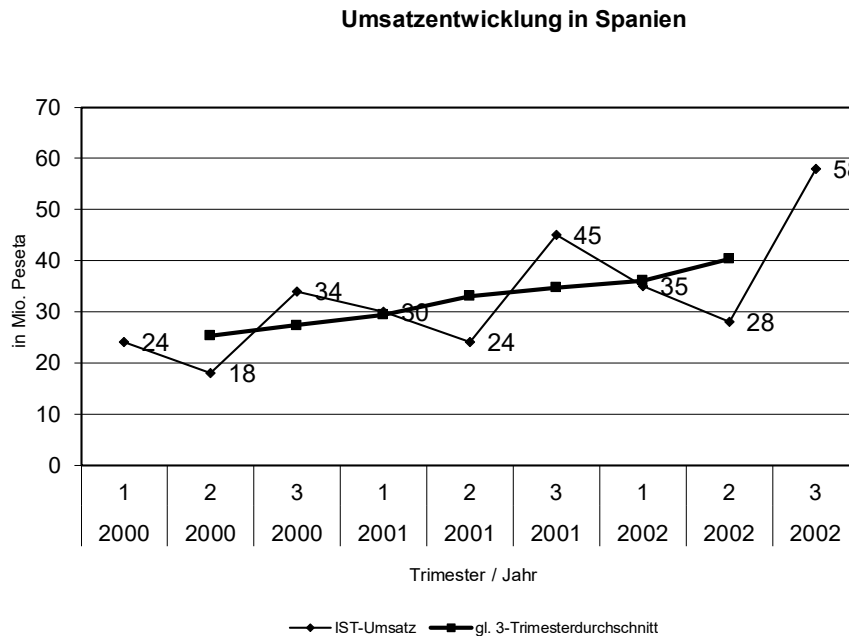
$\bar{X} =$	5.83	-11.60	-6.70	18.73	6.26
Korrekturwert	-1.565	-1.565	-1.565	-1.565	
korr. Saisonkomp.	4.27	-13.17	-8.27	17.17	0.00

Korrekturwert:**-1.565**.....



12.10.2 Umsatzentwicklung eines Unternehmens in Spanien (Seite 173)

zu erstem Punkt:



zu zweitem Punkt:

Es dürfte sich eher um ein multiplikatives Modell handeln, da 'Ausschläge' bzw. Saison-Komponenten mit steigendem Trend zunehmen.

zu drittem bis fünftem Punkt:

Jahr	Trimester	Umsatz (a)	gleitender Trimester- durchschnitt (b)	Saison- faktoren (c) = (a) / (b)	ø korrigierte Saisonfaktoren (d) = ø (c)	saisonbereinigter Umsatz (e) = (a) / (d)	Trend- gerade nach kl. Quadrate (f) = lin. Reg. von (e)	'irreguläre' Residual- komponente (g) = (a) / (d) / (f)	saisonalisierte Trend- gerade (h) = (f) · (d)	saisonalisierte Prognose (i) = (f) · (d)
2000	1	24			1.0045	23.8934	22.6422	1.0553	22.7432	
2000	2	18	25.3333	0.7105	0.7156	25.1520	25.1333	1.0007	17.9866	
2000	3	34	27.3333	1.2439	1.2799	26.5648	27.6244	0.9616	35.3562	
2001	1	30	29.3333	1.0227	1.0045	29.8668	30.1154	0.9917	30.2498	
2001	2	24	33.0000	0.7273	0.7156	33.5360	32.6065	1.0285	23.3348	
2001	3	45	34.6667	1.2981	1.2799	35.1592	35.0976	1.0018	44.9211	
2002	1	35	36.0000	0.9722	1.0045	34.8446	37.5886	0.9270	37.7563	
2002	2	28	40.3333	0.6942	0.7156	39.1254	40.0797	0.9762	28.6830	
2002	3	58			1.2799	45.3164	42.5708	1.0645	54.4859	
2003	1				1.0045		45.0618			45.2628
2003	2				0.7156		47.5529			34.0312
2003	3				1.2799		50.0440			64.0508
Total		2.9791			3.0000					
Trimester		ø von (c)	Korr.faktor	korr. ø von (c)						
		1	0.9975	1.007003462	1.0045					
		2	0.7107	1.007003462	0.7156					
		3	1.2710	1.007003462	1.2799					

Tabellen-Sammlung (diskrete und stetige Zufallsverteilungen)

Binomialverteilung

Einzelwahrscheinlichkeiten

		π												
n	x _i	0.05	0.10	0.20	0.25	0.30	0.40	0.50	0.60	0.70	0.75	0.80	0.90	0.95
1	0	0.9500	0.9000	0.8000	0.7500	0.7000	0.6000	0.5000	0.4000	0.3000	0.2500	0.2000	0.1000	0.0500
	1	0.0500	0.1000	0.2000	0.2500	0.3000	0.4000	0.5000	0.6000	0.7000	0.7500	0.8000	0.9000	0.9500
2	0	0.9025	0.8100	0.6400	0.5625	0.4900	0.3600	0.2500	0.1600	0.0900	0.0625	0.0400	0.0100	0.0025
	1	0.0950	0.1800	0.3200	0.3750	0.4200	0.4800	0.5000	0.4800	0.4200	0.3750	0.3200	0.1800	0.0950
	2	0.0025	0.0100	0.0400	0.0625	0.0900	0.1600	0.2500	0.3600	0.4900	0.5625	0.6400	0.8100	0.9025
3	0	0.8574	0.7290	0.5120	0.4219	0.3430	0.2160	0.1250	0.0640	0.0270	0.0156	0.0080	0.0010	0.0001
	1	0.1354	0.2430	0.3840	0.4219	0.4410	0.4320	0.3750	0.2880	0.1890	0.1406	0.0960	0.0270	0.0071
	2	0.0071	0.0270	0.0960	0.1406	0.1890	0.2880	0.3750	0.4320	0.4410	0.4219	0.3840	0.2430	0.1354
	3	0.0001	0.0010	0.0080	0.0156	0.0270	0.0640	0.1250	0.2160	0.3430	0.4219	0.5120	0.7290	0.8574
4	0	0.8145	0.6561	0.4096	0.3164	0.2401	0.1296	0.0625	0.0256	0.0081	0.0039	0.0016	0.0001	0.0000
	1	0.1715	0.2916	0.4096	0.4219	0.4116	0.3456	0.2500	0.1536	0.0756	0.0469	0.0256	0.0036	0.0005
	2	0.0135	0.0486	0.1536	0.2109	0.2646	0.3456	0.3750	0.3456	0.2646	0.2109	0.1536	0.0486	0.0135
	3	0.0005	0.0036	0.0256	0.0469	0.0756	0.1536	0.2500	0.3456	0.4116	0.4219	0.4096	0.2916	0.1715
	4	0.0000	0.0001	0.0016	0.0039	0.0081	0.0256	0.0625	0.1296	0.2401	0.3164	0.4096	0.6561	0.8145
5	0	0.7738	0.5905	0.3277	0.2373	0.1681	0.0778	0.0313	0.0102	0.0024	0.0010	0.0003	0.0000	0.0000
	1	0.2036	0.3281	0.4096	0.3955	0.3602	0.2592	0.1563	0.0768	0.0284	0.0146	0.0064	0.0005	0.0000
	2	0.0214	0.0729	0.2048	0.2637	0.3087	0.3456	0.3125	0.2304	0.1323	0.0879	0.0512	0.0081	0.0011
	3	0.0011	0.0081	0.0512	0.0879	0.1323	0.2304	0.3125	0.3456	0.3087	0.2637	0.2048	0.0729	0.0214
	4	0.0000	0.0005	0.0064	0.0146	0.0284	0.0768	0.1563	0.2592	0.3602	0.3955	0.4096	0.3281	0.2036
	5	0.0000	0.0000	0.0003	0.0010	0.0024	0.0102	0.0313	0.0778	0.1681	0.2373	0.3277	0.5905	0.7738
6	0	0.7351	0.5314	0.2621	0.1780	0.1176	0.0467	0.0156	0.0041	0.0007	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000
	1	0.2321	0.3543	0.3932	0.3560	0.3025	0.1866	0.0938	0.0369	0.0102	0.0044	0.0015	0.0001	0.0000
	2	0.0305	0.0984	0.2458	0.2966	0.3241	0.3110	0.2344	0.1382	0.0595	0.0330	0.0154	0.0012	0.0001
	3	0.0021	0.0146	0.0819	0.1318	0.1852	0.2765	0.3125	0.2765	0.1852	0.1318	0.0819	0.0146	0.0021
	4	0.0001	0.0012	0.0154	0.0330	0.0595	0.1382	0.2344	0.3110	0.3241	0.2966	0.2458	0.0984	0.0305
	5	0.0000	0.0001	0.0015	0.0044	0.0102	0.0369	0.0938	0.1866	0.3025	0.3560	0.3932	0.3543	0.2321
	6	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0007	0.0041	0.0156	0.0467	0.1176	0.1780	0.2621	0.5314	0.7351
7	0	0.6983	0.4783	0.2097	0.1335	0.0824	0.0280	0.0078	0.0016	0.0002	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.2573	0.3720	0.3670	0.3115	0.2471	0.1306	0.0547	0.0172	0.0036	0.0013	0.0004	0.0000	0.0000
	2	0.0406	0.1240	0.2753	0.3115	0.3177	0.2613	0.1641	0.0774	0.0250	0.0115	0.0043	0.0002	0.0000
	3	0.0036	0.0230	0.1147	0.1730	0.2269	0.2903	0.2734	0.1935	0.0972	0.0577	0.0287	0.0026	0.0002
	4	0.0002	0.0026	0.0287	0.0577	0.0972	0.1935	0.2734	0.2903	0.2269	0.1730	0.1147	0.0230	0.0036
	5	0.0000	0.0002	0.0043	0.0115	0.0250	0.0774	0.1641	0.2613	0.3177	0.3115	0.2753	0.1240	0.0406
	6	0.0000	0.0000	0.0004	0.0013	0.0036	0.0172	0.0547	0.1306	0.2471	0.3115	0.3670	0.3720	0.2573
	7	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0002	0.0016	0.0078	0.0280	0.0824	0.1335	0.2097	0.4783	0.6983
8	0	0.6634	0.4305	0.1678	0.1001	0.0576	0.0168	0.0039	0.0007	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.2793	0.3826	0.3355	0.2670	0.1977	0.0896	0.0313	0.0079	0.0012	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000
	2	0.0515	0.1488	0.2936	0.3115	0.2965	0.2090	0.1094	0.0413	0.0100	0.0038	0.0011	0.0000	0.0000
	3	0.0054	0.0331	0.1468	0.2076	0.2541	0.2787	0.2188	0.1239	0.0467	0.0231	0.0092	0.0004	0.0000
	4	0.0004	0.0046	0.0459	0.0865	0.1361	0.2322	0.2734	0.2322	0.1361	0.0865	0.0459	0.0046	0.0004
	5	0.0000	0.0004	0.0092	0.0231	0.0467	0.1239	0.2188	0.2787	0.2541	0.2076	0.1468	0.0331	0.0054
	6	0.0000	0.0000	0.0011	0.0038	0.0100	0.0413	0.1094	0.2090	0.2965	0.3115	0.2936	0.1488	0.0515
	7	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0012	0.0079	0.0313	0.0896	0.1977	0.2670	0.3355	0.3826	0.2793
	8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0007	0.0039	0.0168	0.0576	0.1001	0.1678	0.4305	0.6634
9	0	0.6302	0.3874	0.1342	0.0751	0.0404	0.0101	0.0020	0.0003	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.2985	0.3874	0.3020	0.2253	0.1556	0.0605	0.0176	0.0035	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.0629	0.1722	0.3020	0.3003	0.2668	0.1612	0.0703	0.0212	0.0039	0.0012	0.0003	0.0000	0.0000
	3	0.0077	0.0446	0.1762	0.2336	0.2668	0.2508	0.1641	0.0743	0.0210	0.0087	0.0028	0.0001	0.0000
	4	0.0006	0.0074	0.0661	0.1168	0.1715	0.2508	0.2461	0.1672	0.0735	0.0389	0.0165	0.0008	0.0000
	5	0.0000	0.0008	0.0165	0.0389	0.0735	0.1672	0.2461	0.2508	0.1715	0.1168	0.0661	0.0074	0.0006
	6	0.0000	0.0001	0.0028	0.0087	0.0210	0.0743	0.1641	0.2508	0.2668	0.2336	0.1762	0.0446	0.0077
	7	0.0000	0.0000	0.0003	0.0012	0.0039	0.0212	0.0703	0.1612	0.2668	0.3003	0.3020	0.1722	0.0629
	8	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0035	0.0176	0.0605	0.1556	0.2253	0.3020	0.3874	0.2985
	9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0003	0.0020	0.0101	0.0404	0.0751	0.1342	0.3874	0.6302
10	0	0.5987	0.3487	0.1074	0.0563	0.0282	0.0060	0.0010	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	1	0.3151	0.3874	0.2684	0.1877	0.1211	0.0403	0.0098	0.0016	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
	2	0.0746	0.1937	0.3020	0.2816	0.2335	0.1209	0.0439	0.0106	0.0014	0.0004	0.0001	0.0000	0.0000
	3	0.0105	0.0574	0.2013	0.2503	0.2668	0.2150	0.1172	0.0425	0.0090	0.0031	0.0008	0.0000	0.0000
	4	0.0010	0.0112	0.0881	0.1460	0.2001	0.2508	0.2051	0.1115	0.0368	0.0162	0.0055	0.0001	0.0000
	5	0.0001	0.0015	0.0264	0.0584	0.1029	0.2007	0.2461	0.2007	0.1029	0.0584	0.0264	0.0015	0.0001
	6	0.0000	0.0001	0.0055	0.0162	0.0368	0.1115	0.2051	0.2508	0.2001	0.1460	0.0881	0.0112	0.0010
	7	0.0000	0.0000	0.0008	0.0031	0.0090	0.0425	0.1172	0.2150	0.2668	0.2503	0.2013	0.0574	0.0105
	8	0.0000	0.0000	0.0001	0.0004	0.0014	0.0106	0.0439	0.1209	0.2335	0.2816	0.3020	0.1937	0.0746
	9	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0016	0.0098	0.0403	0.1211	0.1877	0.2684	0.3874	0.5987
	10	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0001	0.0010	0.0060	0.0282	0.0563	0.1074	0.3487

Hypergeometrische Zufallsverteilung

Einzelwahrscheinlichkeiten /
kumulierte Wahrscheinlichkeit

N	n	S	x_i	Einzelw.	kum.
2	1	1	0	0.5000	0.5000
			1	0.5000	1.0000
3	1	1	0	0.6667	0.6667
			1	0.3333	1.0000
	2	1	0	0.3333	0.3333
			1	0.6667	1.0000
		2	1	0.6667	0.6667
			2	0.3333	1.0000
4	1	1	0	0.7500	0.7500
			1	0.2500	1.0000
	2	1	0	0.5000	0.5000
			1	0.5000	1.0000
		2	0	0.1667	0.1667
			1	0.6667	0.8333
			2	0.1667	1.0000
	3	1	0	0.2500	0.2500
			1	0.7500	1.0000
		2	1	0.5000	0.5000
			2	0.5000	1.0000
		3	2	0.7500	0.7500
			3	0.2500	1.0000
5	1	1	0	0.8000	0.8000
			1	0.2000	1.0000
	2	1	0	0.6000	0.6000
			1	0.4000	1.0000
		2	0	0.3000	0.3000
			1	0.6000	0.9000
			2	0.1000	1.0000
	3	1	0	0.4000	0.4000
			1	0.6000	1.0000
		2	0	0.1000	0.1000
			1	0.6000	0.7000
			2	0.3000	1.0000
		3	1	0.3000	0.3000
			2	0.6000	0.9000
			3	0.1000	1.0000
	4	1	0	0.2000	0.2000
			1	0.8000	1.0000
		2	1	0.4000	0.4000
			2	0.6000	1.0000
		3	2	0.6000	0.6000
			3	0.4000	1.0000
		4	3	0.8000	0.8000
			4	0.2000	1.0000

PoissonverteilungEinzelwahrscheinlichkeiten /
kumulierte Wahrscheinlichkeit

x_i	μ									
	0.1		0.2		0.3		0.4		0.5	
	Einzelw.	kum.	Einzelw.	kum.	Einzelw.	kum.	Einzelw.	kum.	Einzelw.	kum.
0	0.9048	0.9048	0.8187	0.8187	0.7408	0.7408	0.6703	0.6703	0.6065	0.6065
1	0.0905	0.9953	0.1637	0.9825	0.2222	0.9631	0.2681	0.9384	0.3033	0.9098
2	0.0045	0.9998	0.0164	0.9989	0.0333	0.9964	0.0536	0.9921	0.0758	0.9856
3	0.0002	1.0000	0.0011	0.9999	0.0033	0.9997	0.0072	0.9992	0.0126	0.9982
4	0.0000		0.0001	1.0000	0.0003	1.0000	0.0007	0.9999	0.0016	0.9998
5	0.0000		0.0000		0.0000		0.0001	1.0000	0.0002	1.0000

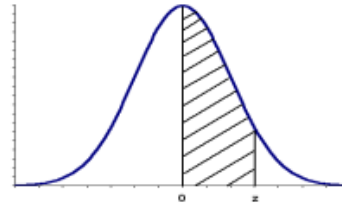
x_i	μ									
	0.6		0.7		0.8		0.9		1.0	
	Einzelw.	kum.	Einzelw.	kum.	Einzelw.	kum.	Einzelw.	kum.	Einzelw.	kum.
0	0.5488	0.5488	0.4966	0.4966	0.4493	0.4493	0.4066	0.4066	0.3679	0.3679
1	0.3293	0.8781	0.3476	0.8442	0.3595	0.8088	0.3659	0.7725	0.3679	0.7358
2	0.0988	0.9769	0.1217	0.9659	0.1438	0.9526	0.1647	0.9371	0.1839	0.9197
3	0.0198	0.9966	0.0284	0.9942	0.0383	0.9909	0.0494	0.9865	0.0613	0.9810
4	0.0030	0.9996	0.0050	0.9992	0.0077	0.9986	0.0111	0.9977	0.0153	0.9963
5	0.0004	1.0000	0.0007	0.9999	0.0012	0.9998	0.0020	0.9997	0.0031	0.9994
6	0.0000		0.0001	1.0000	0.0002	1.0000	0.0003	1.0000	0.0005	0.9999
7	0.0000		0.0000		0.0000		0.0000		0.0001	1.0000

x_i	μ									
	2.0		3.0		4.0		5.0		6.0	
	Einzelw.	kum.	Einzelw.	kum.	Einzelw.	kum.	Einzelw.	kum.	Einzelw.	kum.
0	0.1353	0.1353	0.0498	0.0498	0.0183	0.0183	0.0067	0.0067	0.0025	0.0025
1	0.2707	0.4060	0.1494	0.1991	0.0733	0.0916	0.0337	0.0404	0.0149	0.0174
2	0.2707	0.6767	0.2240	0.4232	0.1465	0.2381	0.0842	0.1247	0.0446	0.0620
3	0.1804	0.8571	0.2240	0.6472	0.1954	0.4335	0.1404	0.2650	0.0892	0.1512
4	0.0902	0.9473	0.1680	0.8153	0.1954	0.6288	0.1755	0.4405	0.1339	0.2851
5	0.0361	0.9834	0.1008	0.9161	0.1563	0.7851	0.1755	0.6160	0.1606	0.4457
6	0.0120	0.9955	0.0504	0.9665	0.1042	0.8893	0.1462	0.7622	0.1606	0.6063
7	0.0034	0.9989	0.0216	0.9881	0.0595	0.9489	0.1044	0.8666	0.1377	0.7440
8	0.0009	0.9998	0.0081	0.9962	0.0298	0.9786	0.0653	0.9319	0.1033	0.8472
9	0.0002	1.0000	0.0027	0.9989	0.0132	0.9919	0.0363	0.9682	0.0688	0.9161
10	0.0000		0.0008	0.9997	0.0053	0.9972	0.0181	0.9863	0.0413	0.9574
11	0.0000		0.0002	0.9999	0.0019	0.9991	0.0082	0.9945	0.0225	0.9799
12	0.0000		0.0001	1.0000	0.0006	0.9997	0.0034	0.9980	0.0113	0.9912
13	0.0000		0.0000		0.0002	0.9999	0.0013	0.9993	0.0052	0.9964
14	0.0000		0.0000		0.0001	1.0000	0.0005	0.9998	0.0022	0.9986
15	0.0000		0.0000		0.0000		0.0002	0.9999	0.0009	0.9995
16	0.0000		0.0000		0.0000		0.0000	1.0000	0.0003	0.9998
17	0.0000		0.0000		0.0000		0.0000		0.0001	0.9999
18	0.0000		0.0000		0.0000		0.0000		0.0000	1.0000

x_i	μ									
	7.0		8.0		9.0		10.0		11.0	
	Einzelw.	kum.	Einzelw.	kum.	Einzelw.	kum.	Einzelw.	kum.	Einzelw.	kum.
0	0.0009	0.0009	0.0003	0.0003	0.0001	0.0001	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
1	0.0064	0.0073	0.0027	0.0030	0.0011	0.0012	0.0005	0.0005	0.0002	0.0002
2	0.0223	0.0296	0.0107	0.0138	0.0050	0.0062	0.0023	0.0028	0.0010	0.0012
3	0.0521	0.0818	0.0286	0.0424	0.0150	0.0212	0.0076	0.0103	0.0037	0.0049
4	0.0912	0.1730	0.0573	0.0996	0.0337	0.0550	0.0189	0.0293	0.0102	0.0151
5	0.1277	0.3007	0.0916	0.1912	0.0607	0.1157	0.0378	0.0671	0.0224	0.0375
6	0.1490	0.4497	0.1221	0.3134	0.0911	0.2068	0.0631	0.1301	0.0411	0.0786
7	0.1490	0.5987	0.1396	0.4530	0.1171	0.3239	0.0901	0.2202	0.0646	0.1432
8	0.1304	0.7291	0.1396	0.5925	0.1318	0.4557	0.1126	0.3328	0.0888	0.2320
9	0.1014	0.8305	0.1241	0.7166	0.1318	0.5874	0.1251	0.4579	0.1085	0.3405
10	0.0710	0.9015	0.0993	0.8159	0.1186	0.7060	0.1251	0.5830	0.1194	0.4599
11	0.0452	0.9467	0.0722	0.8881	0.0970	0.8030	0.1137	0.6968	0.1194	0.5793
12	0.0263	0.9730	0.0481	0.9362	0.0728	0.8758	0.0948	0.7916	0.1094	0.6887
13	0.0142	0.9872	0.0296	0.9658	0.0504	0.9261	0.0729	0.8645	0.0926	0.7813
14	0.0071	0.9943	0.0169	0.9827	0.0324	0.9585	0.0521	0.9165	0.0728	0.8540
15	0.0033	0.9976	0.0090	0.9918	0.0194	0.9780	0.0347	0.9513	0.0534	0.9074
16	0.0014	0.9990	0.0045	0.9963	0.0109	0.9889	0.0217	0.9730	0.0367	0.9441
17	0.0006	0.9996	0.0021	0.9984	0.0058	0.9947	0.0128	0.9857	0.0237	0.9678
18	0.0002	0.9999	0.0009	0.9993	0.0029	0.9976	0.0071	0.9928	0.0145	0.9823
19	0.0001	1.0000	0.0004	0.9997	0.0014	0.9989	0.0037	0.9965	0.0084	0.9907
20	0.0000		0.0002	0.9999	0.0006	0.9996	0.0019	0.9984	0.0046	0.9953
21	0.0000		0.0001	1.0000	0.0003	0.9998	0.0009	0.9993	0.0024	0.9977
22	0.0000		0.0000		0.0001	0.9999	0.0004	0.9997	0.0012	0.9990
23	0.0000		0.0000		0.0000	1.0000	0.0002	0.9999	0.0006	0.9995
24	0.0000		0.0000		0.0000		0.0001	1.0000	0.0003	0.9998
25	0.0000		0.0000		0.0000		0.0000		0.0001	0.9999
26	0.0000		0.0000		0.0000		0.0000		0.0000	1.0000

Standardnormalverteilung

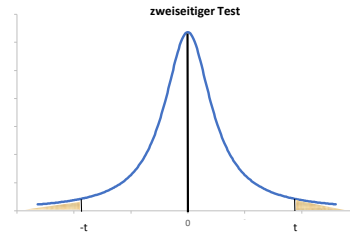
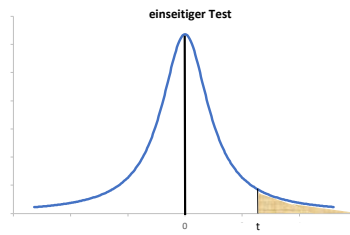
kumulierte Wahrscheinlichkeiten

 $\mu = 0$ und $\sigma = 1$ 

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
3.1	0.4990	0.4991	0.4991	0.4991	0.4992	0.4992	0.4992	0.4992	0.4993	0.4993
3.2	0.4993	0.4993	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4995	0.4995	0.4995
3.3	0.4995	0.4995	0.4995	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4997
3.4	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4998
3.5	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998

T-Verteilung

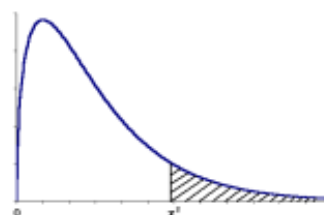
(kritische) t-Werte



df	Signifikanzniveau bei einseitigem Test						
	0.200	0.100	0.050	0.025	0.010	0.005	0.0005
	Signifikanzniveau bei zweiseitigem Test						
	0.400	0.200	0.100	0.050	0.020	0.010	0.0010
1	1.376	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	636.619
2	1.061	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	31.599
3	0.978	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	12.924
4	0.941	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	8.610
5	0.920	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	6.869
6	0.906	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	5.959
7	0.896	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	5.408
8	0.889	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	5.041
9	0.883	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	4.781
10	0.879	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	4.587
11	0.876	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	4.437
12	0.873	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	4.318
13	0.870	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	4.221
14	0.868	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	4.140
15	0.866	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	4.073
16	0.865	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	4.015
17	0.863	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.965
18	0.862	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.922
19	0.861	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.883
20	0.860	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.850
21	0.859	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.819
22	0.858	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.792
23	0.858	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.768
24	0.857	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.745
25	0.856	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.725
26	0.856	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.707
27	0.855	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.690
28	0.855	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.674
29	0.854	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.659
30	0.854	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.646
40	0.851	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	3.551
50	0.849	1.299	1.676	2.009	2.403	2.678	3.496
60	0.848	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	3.460
120	0.845	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	3.373
180	0.844	1.286	1.653	1.973	2.347	2.603	3.345
∞	0.842	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	3.291

Chiquadratverteilung

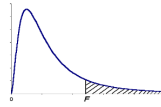
(kritische) Chiquadrat-Werte bzw. χ^2



df	0.200	0.100	0.050	0.025	0.020	0.010	0.005
1	1.642	2.706	3.841	5.024	5.412	6.635	7.879
2	3.219	4.605	5.991	7.378	7.824	9.210	10.597
3	4.642	6.251	7.815	9.348	9.837	11.345	12.838
4	5.989	7.779	9.488	11.143	11.668	13.277	14.860
5	7.289	9.236	11.070	12.832	13.388	15.086	16.750
6	8.558	10.645	12.592	14.449	15.033	16.812	18.548
7	9.803	12.017	14.067	16.013	16.622	18.475	20.278
8	11.030	13.362	15.507	17.535	18.168	20.090	21.955
9	12.242	14.684	16.919	19.023	19.679	21.666	23.589
10	13.442	15.987	18.307	20.483	21.161	23.209	25.188
11	14.631	17.275	19.675	21.920	22.618	24.725	26.757
12	15.812	18.549	21.026	23.337	24.054	26.217	28.300
13	16.985	19.812	22.362	24.736	25.471	27.688	29.819
14	18.151	21.064	23.685	26.119	26.873	29.141	31.319
15	19.311	22.307	24.996	27.488	28.259	30.578	32.801
16	20.465	23.542	26.296	28.845	29.633	32.000	34.267
17	21.615	24.769	27.587	30.191	30.995	33.409	35.718
18	22.760	25.989	28.869	31.526	32.346	34.805	37.156
19	23.900	27.204	30.144	32.852	33.687	36.191	38.582
20	25.038	28.412	31.410	34.170	35.020	37.566	39.997
21	26.171	29.615	32.671	35.479	36.343	38.932	41.401
22	27.301	30.813	33.924	36.781	37.659	40.289	42.796
23	28.429	32.007	35.172	38.076	38.968	41.638	44.181
24	29.553	33.196	36.415	39.364	40.270	42.980	45.558
25	30.675	34.382	37.652	40.646	41.566	44.314	46.928
26	31.795	35.563	38.885	41.923	42.856	45.642	48.290
27	32.912	36.741	40.113	43.195	44.140	46.963	49.645
28	34.027	37.916	41.337	44.461	45.419	48.278	50.994
29	35.139	39.087	42.557	45.722	46.693	49.588	52.335
30	36.250	40.256	43.773	46.979	47.962	50.892	53.672
40	47.269	51.805	55.758	59.342	60.436	63.691	66.766
50	58.164	63.167	67.505	71.420	72.613	76.154	79.490
60	68.972	74.397	79.082	83.298	84.580	88.379	91.952
120	132.806	140.233	146.567	152.211	153.918	158.950	163.648
180	195.743	204.704	212.304	219.044	221.077	227.056	232.620

F-Verteilung(kritische) *F*-Werte

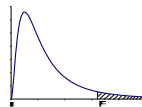
bei Signifikanzniveau von 5%



		Anzahl Freiheitsgrade (df) im Zähler																		
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
Anzahl Freiheitsgrade (df) im Nenner	1	161.45	199.50	215.71	224.58	230.16	233.99	236.77	238.88	240.54	241.88	243.91	245.95	248.01	249.05	250.10	251.14	252.20	253.25	254.31
	2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.41	19.43	19.45	19.45	19.46	19.47	19.48	19.49	19.50
	3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
	4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
	5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40	4.36
	6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
	7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
	8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93
	9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71
	10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
	11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
	12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34	2.30
	13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21
	14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.22	2.18	2.13
	15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07
	16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.49	2.42	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.11	2.06	2.01
	17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96
	18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92
	19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88
	20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84
	21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81
	22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78
	23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13	2.05	2.01	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76
	24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73
	25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62	
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51	
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39	
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.18	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.50	1.43	1.35	1.25	
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.32	1.22	1.00	

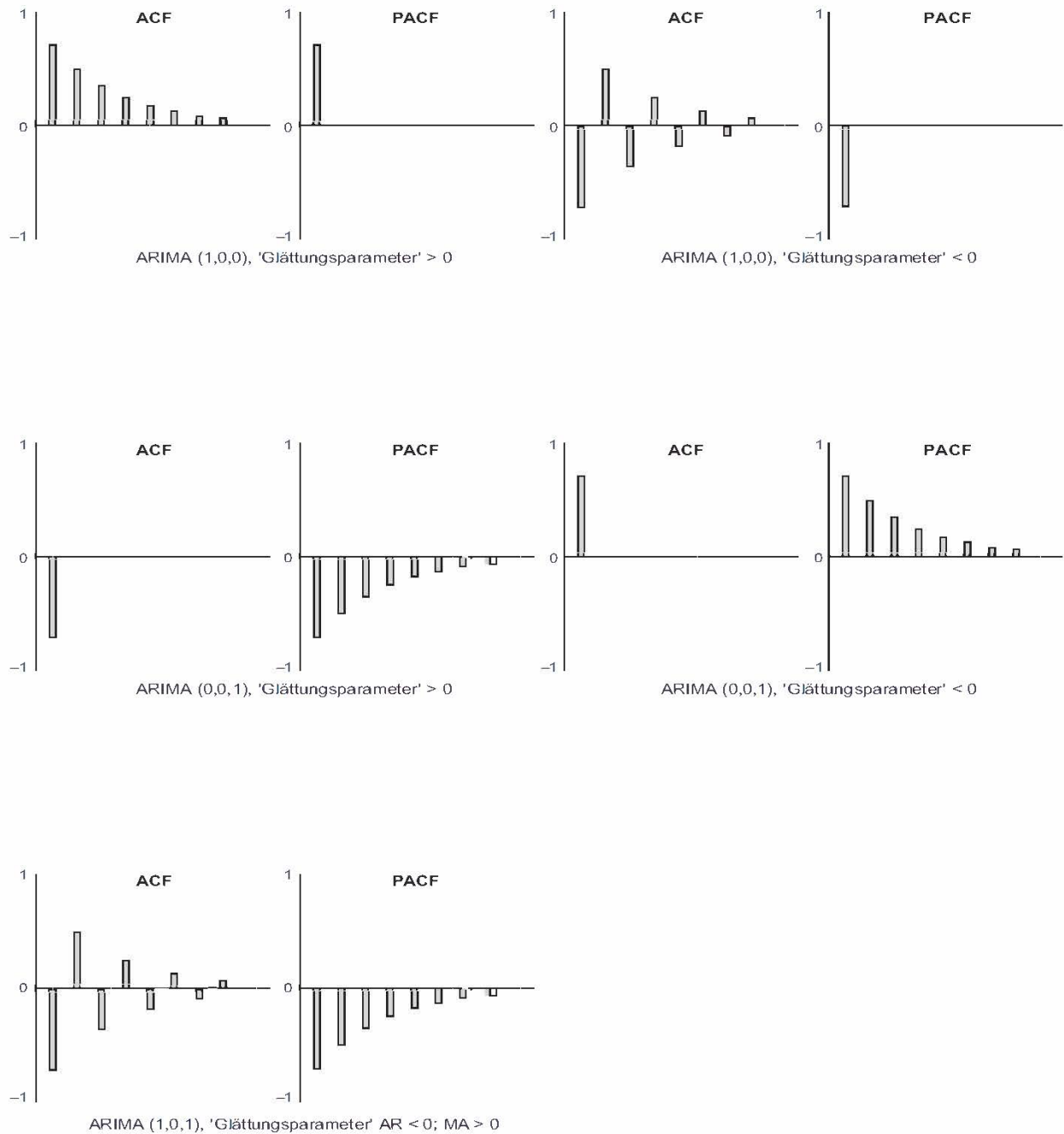
F-Verteilung(kritische) *F*-Werte

bei Signifikanzniveau von 1%



		Anzahl Freiheitsgrade (df) im Zähler																		
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
Anzahl Freiheitsgrade (df) im Nenner	1	4'052	5'000	5'403	5'625	5'764	5'859	5'928	5'981	6'022	6'056	6'106	6'157	6'209	6'235	6'261	6'287	6'313	6'339	6'366
	2	98.50	99.00	99.17	99.25	99.30	99.33	99.36	99.37	99.39	99.40	99.42	99.43	99.45	99.46	99.47	99.47	99.48	99.49	99.50
	3	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.35	27.23	27.05	26.87	26.69	26.60	26.50	26.41	26.32	26.22	26.13
	4	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66	14.55	14.37	14.20	14.02	13.93	13.84	13.75	13.65	13.56	13.46
	5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16	10.05	9.89	9.72	9.55	9.47	9.38	9.29	9.20	9.11	9.02
	6	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.72	7.56	7.40	7.31	7.23	7.14	7.06	6.97	6.88
	7	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.47	6.31	6.16	6.07	5.99	5.91	5.82	5.74	5.65
	8	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.67	5.52	5.36	5.28	5.20	5.12	5.03	4.95	4.86
	9	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.11	4.96	4.81	4.73	4.65	4.57	4.48	4.40	4.31
	10	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.71	4.56	4.41	4.33	4.25	4.17	4.08	4.00	3.91
	11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.40	4.25	4.10	4.02	3.94	3.86	3.78	3.69	3.60
	12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.16	4.01	3.86	3.78	3.70	3.62	3.54	3.45	3.36
	13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	3.96	3.82	3.66	3.59	3.51	3.43	3.34	3.25	3.17
	14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.80	3.66	3.51	3.43	3.35	3.27	3.18	3.09	3.00
	15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.67	3.52	3.37	3.29	3.21	3.13	3.05	2.96	2.87
	16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.55	3.41	3.26	3.18	3.10	3.02	2.93	2.84	2.75
	17	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.46	3.31	3.16	3.08	3.00	2.92	2.83	2.75	2.65
	18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.37	3.23	3.08	3.00	2.92	2.84	2.75	2.66	2.57
	19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.30	3.15	3.00	2.92	2.84	2.76	2.67	2.58	2.49
	20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.23	3.09	2.94	2.86	2.78	2.69	2.61	2.52	2.42
	21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31	3.17	3.03	2.88	2.80	2.72	2.64	2.55	2.46	2.36
	22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.12	2.98	2.83	2.75	2.67	2.58	2.50	2.40	2.31
	23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21	3.07	2.93	2.78	2.70	2.62	2.54	2.45	2.35	2.26
	24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.03	2.89	2.74	2.66	2.58	2.49	2.40	2.31	2.21
	25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13	2.99	2.85	2.70	2.62	2.54	2.45	2.36	2.27	2.17
	30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.84	2.70	2.55	2.47	2.39	2.30	2.21	2.11	2.01
	40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.66	2.52	2.37	2.29	2.20	2.11	2.02	1.92	1.80
	60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.50	2.35	2.20	2.12	2.03	1.94	1.84	1.73	1.60
120	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.34	2.19	2.03	1.95	1.86	1.76	1.66	1.53	1.38	
∞	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.18	2.04	1.88	1.79	1.70	1.59	1.47	1.32	1.00	

Theoretische ARIMA-Modelle und deren ACF- und PACF-Diagramme³⁰⁰



³⁰⁰ siehe auch SPSS Trends 10.0, 1999, S. 292ff.

Formelsammlung

INDEXZAHLEN – Kapitel 4

$$\text{Preiseinzelindex} = \frac{\text{Preis}_{\text{Zeitpunkt } t}}{\text{Preis}_{\text{Basiszeitpunkt}}}$$

$$\text{ungewogener Preisindex} = \frac{\sum \text{Preise}_{\text{Zeitpunkt } t}}{\sum \text{Preise}_{\text{Basiszeitpunkt}}}$$

$$\text{Preisindex}_{\text{nach Laspeyres}} = \frac{\sum (\text{Preis}_{\text{Zeitpunkt } t} \cdot \text{Menge}_{\text{Basiszeitpunkt}})}{\sum (\text{Preis}_{\text{Basiszeitpunkt}} \cdot \text{Menge}_{\text{Basiszeitpunkt}})}$$

$$\text{Preisindex}_{\text{nach Paasche}} = \frac{\sum (\text{Preis}_{\text{Zeitpunkt } t} \cdot \text{Menge}_{\text{Zeitpunkt } t})}{\sum (\text{Preis}_{\text{Basiszeitpunkt}} \cdot \text{Menge}_{\text{Zeitpunkt } t})}$$

$$\text{Index}_{\text{nach Fisher}} = \sqrt[2]{\text{Index}_{\text{nach Laspeyres}} \cdot \text{Index}_{\text{nach Paasche}}}$$

$$\text{Wert-Index} = \frac{\sum (\text{Preis}_{\text{Zeitpunkt } t} \cdot \text{Menge}_{\text{Zeitpunkt } t})}{\sum (\text{Preis}_{\text{Basiszeitpunkt}} \cdot \text{Menge}_{\text{Basiszeitpunkt}})}$$

MITTELWERTE UND KENNZAHLEN DER STREUUNG – Kapitel 5

Einfaches arithmetisches Mittel einer Grundgesamtheit

$$\mu = \frac{\sum x_i}{N}$$

μ steht für das einfache arithmetische Mittel einer Grundgesamtheit [mü]

N ist die Anzahl von Werten in der Grundgesamtheit

x_i steht für einen Wert der Grundgesamtheit

$\sum$ ist das Summenzeichen 'sigma' und zeigt die mathematische Operation des Summierens an

$\sum x_i$ ist die Summe aller x_i – Werte

Einfaches arithmetisches Mittel einer Stichprobe

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$$

$\bar{x}$ steht für das einfache arithmetische Mittel einer Stichprobe [x quer]

n ist die Anzahl von Werten in der Stichprobe

x_i steht für einen Wert der Stichprobe

Gewogenes arithmetisches Mittel einer **Stichprobe**

$$\bar{x} = \frac{\sum (w_i \cdot x_i)}{\sum w_i}$$

$\bar{x}$ steht für das gewogene arithmetische Mittel einer Stichprobe [x quer]
 x_i steht für einen Wert einer Stichprobe, bzw. eine Kategorienmitte bei Häufigkeitsverteilungen
 w_i ist die relative oder absolute Häufigkeit des Vorkommens von x_i
 $\sum w_i$ steht für die Summe der relativen oder absoluten Häufigkeiten und ist entweder 1 oder n

Geometrisches Mittel

$$x_{GM} = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdots x_n} = \sqrt[n]{\prod x_i}$$

Spannweite

Spannweite = höchster Wert - niedrigster Wert

Mittlere bzw. durchschnittliche absolute Abweichung vom arithmetischen Mittel einer **Stichprobe**

$$MD = \frac{\sum |x_i - \bar{x}|}{n}$$

x_i steht für einen Wert der Stichprobe, bzw. eine Kategorienmitte bei Häufigkeitsverteilungen
 $\bar{x}$ ist das arithmetische Mittel der Stichprobe
n ist die Anzahl von Werten in der Stichprobe
| | steht für den absoluten Wert, bzw. das Vorzeichen wird einfach weggelassen

Standardabweichung einer **Grundgesamtheit**

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \mu)^2}{N}}$$

σ steht für die Standardabweichung einer Grundgesamtheit [sigma]
 μ ist das arithmetische Mittel einer Grundgesamtheit [mü]
N ist die Anzahl von Werten in der Grundgesamtheit
 x_i steht für einen Wert der Grundgesamtheit

Standardabweichung einer **Stichprobe**

$$s = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}}$$

s steht für die Standardabweichung einer Stichprobe
 $\bar{x}$ ist das arithmetische Mittel einer Stichprobe
n ist die Anzahl von Werten in der Stichprobe
 x_i steht für einen Wert der Stichprobe

Transformation

$$\sigma = \sqrt{\frac{n-1}{n}} \cdot s \quad \text{bzw.} \quad s = \sqrt{\frac{n}{n-1}} \cdot \sigma$$

Standardabweichung einer Grundgesamtheit

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum [(x_i - \mu)^2 \cdot w_i]}{\sum w_i}}$$

- μ steht für das gewogene arithmetische Mittel einer Grundgesamtheit [mü]
 x_i steht für einen Wert der Grundgesamtheit, bzw. eine Kategorienmitte bei Häufigkeitsverteilungen
 w_i ist die relative oder absolute Häufigkeit des Vorkommens von x_i
 $\sum w_i$ steht für die Summe der relativen oder absoluten Häufigkeiten und ist entweder 1 oder N

Varianz einer Grundgesamtheit

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \mu)^2}{N}$$

Varianz einer Stichprobe

$$s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n - 1}$$

Variationskoeffizient einer Stichprobe

$$CV = \frac{s}{\bar{x}}$$

Rendite/Risiko-Kennzahl von Sharpe

$$\text{Kennzahl von Sharpe}_{\text{in Periode } j} = \frac{\emptyset \text{ Rendite}_{\text{von Portefeuille } i \text{ in Periode } j} - \emptyset \text{ risikofreie Rendite}_{\text{in Periode } j}}{\text{Standardabweichung der Rendite}_{\text{von Portefeuille } i \text{ in Periode } j}}$$

DISKRETE UND STETIGE ZUFALLSVERTEILUNGEN - Kapitel 7Arithmetische Mittel einer Zufallsverteilung (Erwartungswert)

$$\mu = E(X) = \sum [x_i \cdot p(x_i)]$$

- μ steht für das arithmetische Mittel [mü]
 $E(X)$ steht für den Erwartungswert
 x_i steht für einen Wert der auftretenden Fälle bzw. der Zufallsvariablen
 $p(x_i)$ ist die relative Wahrscheinlichkeit eines x_i – Wertes

Standardabweichung bzw. Varianz einer Zufallsverteilung

$$\sigma = \sqrt{\sum [(x_i - \mu)^2 \cdot p(x_i)]}$$

$$\sigma^2 = V(X) = \sum [(x_i - \mu)^2 \cdot p(x_i)]$$

σ bzw. σ^2 steht für die Standardabweichung bzw. Varianz [sigma]
 μ steht für das arithmetische Mittel [mü] bzw. den Erwartungswert $E(X)$
 $V(X)$ steht für die Varianz
 x_i steht für einen Wert der auftretenden Fälle bzw. der Zufallsvariablen
 $p(x_i)$ ist die relative Wahrscheinlichkeit eines x_i – Wertes

Einzelwahrscheinlichkeit des Auftretens von x_i 'Erfolgen' der Binomialverteilung

$$P(x_i) = \frac{n!}{x_i! \cdot (n - x_i)!} \cdot \pi^{x_i} \cdot (1 - \pi)^{n - x_i}$$

$P(x_i)$ ist die Einzelwahrscheinlichkeit des Auftretens von x_i 'Erfolgen'
 x_i steht für die Anzahl des Auftretens von 'Erfolgen'
 n ist die Anzahl von Versuchen
 π ist die (theoretische) Wahrscheinlichkeit des 'Erfolges' bei jedem Versuch [pi]
 $!$ steht für 'Fakultät' und bedeutet die Multiplikation der vorgegebenen Zahl mit der nächst kleineren ganzen Zahl bis hinunter auf 1 (definitionsgemäss ist $0! = 1$)

Arithmetische Mittel einer Binomialverteilung

$$\mu = n \cdot \pi$$

Standardabweichung bzw. Varianz einer Binomialverteilung

$$\sigma = \sqrt{n \cdot \pi \cdot (1 - \pi)}$$

$$\sigma^2 = n \cdot \pi \cdot (1 - \pi)$$

Einzelwahrscheinlichkeit des Auftretens von x_i 'Erfolgen' der hypergeometrischen Zufallsverteilung

$$P(x_i) = \frac{\frac{S!}{x_i! \cdot (S - x_i)!} \cdot \frac{(N - S)!}{(n - x_i)! \cdot (N - S - n + x_i)!}}{\frac{N!}{n! \cdot (N - n)!}}$$

$P(x_i)$ ist die Einzelwahrscheinlichkeit des Auftretens von x_i 'Erfolgen'
 x_i steht für die Anzahl des Auftretens von 'Erfolgen'
 n ist die Anzahl von Versuchen bzw. die Grösse der Stichprobe
 N ist die Grösse der Grundgesamtheit, aus der die Versuche entnommen werden
 S ist die Anzahl von 'Erfolgen' in der Grundgesamtheit, wobei $\pi = S / N$
 $!$ steht für 'Fakultät' und bedeutet die Multiplikation der vorgegebenen Zahl mit der nächst kleineren ganzen Zahl bis hinunter auf 1 (definitionsgemäss ist $0! = 1$)

Einzelwahrscheinlichkeit des Auftretens von x_i 'Ereignissen' der Poissonverteilung

$$P(x_i) = \frac{\mu^{x_i} \cdot e^{-\mu}}{x_i!}$$

- μ ist das arithmetische Mittel der auftretenden 'Ereignisse' (innerhalb eines gegebenen Zeitintervalls) [mü], wobei $\mu = n \cdot \pi$
 $P(x_i)$ ist die Einzelwahrscheinlichkeit des Auftretens von x_i 'Ereignissen'
 x_i steht für die Anzahl des Auftretens von 'Ereignissen'
 e ist die Konstante 2.71828 (Basis des Logarithmus naturalis 'ln' bzw. 'log_e')
 $!$ steht für 'Fakultät' und bedeutet die Multiplikation der vorgegebenen Zahl mit der nächst kleineren ganzen Zahl bis hinunter auf 1 (definitionsgemäss ist $0! = 1$)

'Transformation' einer Normalverteilung zur Standardnormalverteilung 'z'

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

- σ steht für die Standardabweichung [sigma] der Normalverteilung
 μ ist das arithmetische Mittel bzw. der Erwartungswert [mü] der Normalverteilung
 x steht für irgendeinen Wert bzw. Merkmalsausprägung des Daten-Sets

STICHPROBENTHEORIE UND STICHPROBENVERTEILUNGEN – Kapitel 8Zusammenhang zwischen den Parametern der Grundgesamtheit und denjenigen der arithmetischen Mittel der Stichprobe:

$$\begin{aligned}\mu_{\bar{x}} &\approx \mu \\ \sigma_{\bar{x}} &\approx \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\end{aligned}$$

- $\mu_{\bar{x}}$ steht für das arithmetische Mittel der arithmetischen Mittel der Stichproben
 μ ist das arithmetische Mittel [mü] der Grundgesamtheit
 $\sigma_{\bar{x}}$ steht für die Standardabweichung der arithmetischen Mittel der Stichproben
 σ ist die Standardabweichung [sigma] der Grundgesamtheit
 n ist der Stichprobenumfang

Zusammenhang zwischen den Parametern der Grundgesamtheit und denjenigen der Stichprobe:

$$\begin{aligned}\mu_x = \bar{x} &\approx \mu \\ \sigma_x &\approx \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \text{ wenn } \sigma \text{ der Grundgesamtheit bekannt} \\ s_x &\approx \frac{s}{\sqrt{n}}, \text{ wenn } \sigma \text{ der Grundgesamtheit unbekannt}\end{aligned}$$

- $\mu_x, \bar{x}$ steht für das arithmetische Mittel der Stichprobe
 μ ist das arithmetische Mittel [mü] der Grundgesamtheit
 σ_x bzw. s_x steht für die Standardabweichung der Stichprobe bei bekanntem und unbekanntem ' σ '
 σ ist die Standardabweichung [sigma] der Grundgesamtheit
 s ist die Standardabweichung der Stichprobe
 n ist der Stichprobenumfang

95%ige Vertrauensintervall des arithmetischen Mittels der Grundgesamtheit

$$\mu = \bar{x} \pm z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{bzw.} \quad \bar{x} \pm z \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \quad ; \text{ wobei 'z' hier der kritische z-Wert darstellt}$$

$$\mu = \bar{x} \pm 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{bzw.} \quad \bar{x} \pm 1.96 \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

99%ige Vertrauensintervall des arithmetischen Mittels der Grundgesamtheit

$$\mu = \bar{x} \pm z \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{bzw.} \quad \bar{x} \pm z \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \quad ; \text{ wobei 'z' hier der kritische z-Wert darstellt}$$

$$\mu = \bar{x} \pm 2.575 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad \text{bzw.} \quad \bar{x} \pm 2.575 \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}$$

95%ige Vertrauensintervall des arithmetischen Mittels der Grundgesamtheit bei **Prozentanteilen bzw. Proportionen**

$$\pi = p \pm z \cdot \sqrt{\frac{\pi \cdot (1 - \pi)}{n}} \quad \text{bzw.} \quad p \pm z \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1 - p)}{n}} \quad ; \text{ wobei 'z' hier der}$$

kritische z-Wert darstellt

$$\pi = p \pm 1.96 \cdot \sqrt{\frac{\pi \cdot (1 - \pi)}{n}} \quad \text{bzw.} \quad p \pm 1.96 \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1 - p)}{n}}$$

p steht für das arithmetische Mittel der Stichprobe ausgedrückt als
 Prozentanteil bzw. Proportion und entspricht dem Wert $\left(\frac{x}{n}\right)$
 π ist das arithmetische Mittel der Grundgesamtheit ausgedrückt
 als Prozentanteil bzw. Proportion [pi]
 n ist der Stichprobenumfang

99%ige Vertrauensintervall des arithmetischen Mittels der Grundgesamtheit bei **Prozentanteilen bzw. Proportionen**

$$\pi = p \pm z \cdot \sqrt{\frac{\pi \cdot (1 - \pi)}{n}} \quad \text{bzw.} \quad p \pm z \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1 - p)}{n}} \quad ; \text{ wobei 'z' hier der}$$

kritische z-Wert darstellt

$$\pi = p \pm 2.575 \cdot \sqrt{\frac{\pi \cdot (1 - \pi)}{n}} \quad \text{bzw.} \quad p \pm 2.575 \cdot \sqrt{\frac{p \cdot (1 - p)}{n}}$$

'Optimaler' Stichprobenumfang zur Bestimmung der Konfidenz- bzw. Vertrauensintervall des arithmetischen Mittels der Grundgesamtheit [bzw. der Prozentanteile oder Proportionen desselben]

$$n = \left(\frac{z \cdot s}{E} \right)^2 \quad \text{bzw.} \quad \left[n = p \cdot (1-p) \cdot \left(\frac{z}{E} \right)^2 \right]$$

n steht für den zu ermittelnden 'optimalen' Stichprobenumfang
 z ist der kritische z-Wert bezüglich des gewählten Konfidenz- bzw. Vertrauensniveaus
 s ist die (geschätzte) Standardabweichung der Grundgesamtheit
 p ist das (geschätzte) arithmetische Mittel der Grundgesamtheit ausgedrückt als Prozentanteil bzw. Proportion
 E ist die absolute, maximal zulässige Abweichung

HYPOTHESENTESTS – Kapitel 9

Test-Statistik bezüglich des arithmetischen Mittels der Grundgesamtheit aufgrund einer grossen Stichprobe

$$z^* = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \quad \text{bei bekannter Standardabweichung der Grundgesamtheit '}\sigma\text{'}$$

$$z^* = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}} \quad \text{bei unbekannter Standardabweichung der Grundgesamtheit '}\sigma\text{'}$$

z^* steht für die standardisierte Prüfgrösse bzw. Test-Statistik bezüglich Standardnormalverteilung
 σ ist die Standardabweichung [sigma] der Grundgesamtheit
 s ist die Standardabweichung der Stichprobe
 μ ist das arithmetische Mittel [mü] der Grundgesamtheit
 $\bar{x}$ ist das arithmetische Mittel der Stichprobe
 n steht für den Stichprobenumfang

Fehler des Typs I und des Typs II

Null-Hypothese	H_0 wird nicht verworfen	H_0 wird verworfen
H_0 ist richtig	richtige Entscheidung	Fehler des Typs I [α]
H_0 ist falsch	Fehler des Typs II [β]	richtige Entscheidung

Einige wichtige zusätzliche Test-Statistiken

Fragestellung / Null-Hypothese	bekannt / unbekannt	Test-Statistik	Bemerkungen
μ	σ bekannt	$z^* = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$	Grundgesamtheit normalverteilt <u>oder</u> Stichprobe grösser als 30
μ	σ unbekannt	$z^* = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$	Grundgesamtheit normalverteilt <u>und</u> Stichprobe grösser als 30 <u>oder</u> Stichprobe grösser als 100
μ	σ unbekannt	$t_{(n-1)}^* = \frac{\bar{x} - \mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$	Grundgesamtheit normalverteilt <u>und</u> Stichprobe kleiner als 30
$\mu_1 = \mu_2$ bzw. $\mu_1 - \mu_2 = 0$	σ_1 und σ_2 bekannt	$z^* = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}}}$	Grundgesamtheit normalverteilt <u>oder</u> beide Stichproben je grösser als 30
$\mu_1 = \mu_2$	σ_1 und σ_2 unbekannt	$z^* = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}}}$	beide Stichproben je grösser als 100
$\mu_1 = \mu_2$	σ_1^2 und σ_2^2 unbekannt	$t_{(n_1+n_2-2)}^* = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\sqrt{\frac{(n_1-1) \cdot s_1^2 + (n_2-1) \cdot s_2^2}{n_1+n_2-2} \cdot \left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}$	Grundgesamtheit normalverteilt
σ^2	μ unbekannt	$\chi^2_{(n-1)}^* = \frac{(n-1) \cdot s^2}{\sigma^2}$	Grundgesamtheit normalverteilt
$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ bzw. $\sigma_1^2 - \sigma_2^2 = 0$		$F_{(n_1-1; n_2-1)}^* = \frac{s_1^2}{s_2^2}$	Grundgesamtheit normalverteilt; falls zweiseitiger Test: grösseres s^2 in den Zähler
π		$z^* = \frac{p - \pi}{\sqrt{\frac{\pi \cdot (1-\pi)}{n}}}$	bei Prozentanteilen bzw. Proportionen; $p = \frac{x}{n}$
$\pi_1 = \pi_2$ bzw. $\pi_1 - \pi_2 = 0$		$z^* = \frac{p_1 - p_2}{\sqrt{\frac{p_c \cdot (1-p_c)}{n_1} + \frac{p_c \cdot (1-p_c)}{n_2}}}$	bei Prozentanteilen bzw. Proportionen; $p_c = \frac{x_1 + x_2}{n_1 + n_2}$ $n_1 = \frac{\pi_1 \cdot (1-\pi_1)}{9}$ $n_2 = \frac{\pi_2 \cdot (1-\pi_2)}{9}$

REGRESSION UND KORRELATION – Kapitel 10Linearer Zusammenhang bzw. Regressionsgerade

$$Y' = a_0 + b \cdot X$$

Y' steht für den geschätzten Wert der abhängigen Y-Variable bezüglich eines gewählten X-Wertes

a_0 ist der Achsenabschnitt (intercept) der linearen Gleichung bei einem X-Wert von Null

b ist die Steigung (slope) der linearen Gleichung, d.h. wieviel sich durchschnittlich der geschätzte Wert von Y' durch eine Veränderung einer Einheit von X verändert

X ist jeder gewählte Wert der unabhängigen Variablen 'X'

Korrelationskoeffizient

$$r = \frac{\sum[(X - \bar{X}) \cdot (Y - \bar{Y})]}{\sqrt{\sum(X - \bar{X})^2 \cdot \sum(Y - \bar{Y})^2}} = \frac{\text{cov}_{X,Y}}{s_X \cdot s_Y}$$

r steht für den Korrelationskoeffizient

X ist der jeweilige X-Wert eines beobachteten Wertepaares

$\bar{X}$ ist das arithmetische Mittel aller X-Werte

Y ist der jeweilige Y-Wert eines beobachteten Wertepaares

$\bar{Y}$ ist das arithmetische Mittel aller Y-Werte

$$s_X \quad \text{Standardabweichung der X-Werte bzw. } s_X = \sqrt{\frac{\sum(X - \bar{X})^2}{n - 1}}$$

$$s_Y \quad \text{Standardabweichung der Y-Werte bzw. } s_Y = \sqrt{\frac{\sum(Y - \bar{Y})^2}{n - 1}}$$

$$\text{cov}_{X,Y} \quad \text{Kovarianz bzw. } \text{cov}_{X,Y} = \frac{\sum[(X - \bar{X}) \cdot (Y - \bar{Y})]}{n - 1}$$

Null-Hypothese und Alternativ-Hypothese bezüglich Korrelationskoeffizient

$H_0: \rho = 0$ (Die Korrelation $[\rho]$ in der Grundgesamtheit ist gleich Null)

$H_1: \rho \neq 0$ (Die Korrelation $[\rho]$ in der Grundgesamtheit ist von Null verschieden)

Test-Statistik bzw. Prüfgrösse bezüglich des Korrelationskoeffizienten

$$t_{(n-2)}^* = \frac{r \cdot \sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$$

r steht für den Korrelationskoeffizient

n ist die Anzahl der Beobachtungen

$(n - 2)$ ist die Anzahl der Freiheitsgrade

Determinationskoeffizient bzw. Bestimmtheitsmass

$$r^2 = \left[\frac{\sum[(X - \bar{X}) \cdot (Y - \bar{Y})]}{\sqrt{\sum(X - \bar{X})^2 \cdot \sum(Y - \bar{Y})^2}} \right]^2$$

r^2 steht für den Determinationskoeffizient und entspricht dem Quadrat des Korrelationskoeffizienten

X ist der jeweilige X-Wert eines beobachteten Wertepaares

$\bar{X}$ ist das arithmetische Mittel aller X-Werte

Y ist der jeweilige Y-Wert eines beobachteten Wertepaares

$\bar{Y}$ ist das arithmetische Mittel aller Y-Werte

$$r^2 = \frac{s_e^2}{s_T^2} = \frac{\text{erklärte Varianz}_{\text{von } Y}}{\text{Varianz Total}_{\text{von } Y}} = \frac{\frac{1}{n-1} \cdot \sum (Y' - \bar{Y})^2}{\frac{1}{n-1} \cdot \sum (Y - \bar{Y})^2} \Rightarrow \frac{SSR}{SST} = 1 - \frac{SSE}{SST}$$

$$\text{wobei } s_T^2 = s_e^2 + s_u^2$$

SSR (Sum of Squared Regressions)

ist die Quadratsumme der Regressionsabweichungen bzw. $\sum (Y' - \bar{Y})^2$

SSE (Sum of Squared Errors or residuals)

ist die Quadratsumme der Residuenabweichungen

(auch als ε bezeichnet) bzw. $\sum (Y - Y')^2$

SST (Sum of Squared Totals) ist die Quadratsumme der

Total-Abweichungen bzw. $\sum (Y - \bar{Y})^2$

Methode der kleinsten Quadrate

$$Y' = a_0 + b \cdot X$$

Y' steht für den geschätzten Wert der abhängigen Y-Variable
bezüglich eines gewählten X-Wertes

a_0 ist der Achsenabschnitt der linearen Gleichung bei einem X-Wert von Null

b ist die Steigung der linearen Gleichung - Regressionskoeffizient
(regression coefficient) genannt,

d.h. wieviel sich durchschnittlich der geschätzte Wert von Y'

durch eine Veränderung einer Einheit von X verändert

X ist jeder gewählte Wert der unabhängigen Variablen ' X '

$$b = \frac{\sum [(X - \bar{X}) \cdot (Y - \bar{Y})]}{\sum (X - \bar{X})^2} = \frac{\text{cov}_{X,Y}}{s_X^2}$$

$$a_0 = \bar{Y} - b \cdot \bar{X}$$

$\bar{X}$ steht für das arithmetische Mittel der X-Werte

$\bar{Y}$ steht für das arithmetische Mittel der Y-Werte

Standardfehler der Schätzung

$$SEE = \sqrt{\frac{\sum (Y - Y')^2}{n - 2}}$$

Durbin-Watson-Statistik

$$DW = \frac{\sum (\varepsilon_t - \varepsilon_{t-1})^2}{\sum \varepsilon_t^2}$$

ε_t Residuenabweichungen bzw. $(Y - Y')$

Vertrauensintervall des 'wahren' Achsenabschnitts ' α_0 ' der Grundgesamtheit

$$\alpha_0 = a_0 \pm t_{(n-2)} \cdot SEE \cdot \sqrt{\frac{\sum X^2}{n \cdot \sum (X - \bar{X})^2}}$$

α_0 steht für den 'wahren' Achsenabschnitt (der Grundgesamtheit)

$\bar{X}$ steht für das arithmetische Mittel der X-Werte

SEE steht den Standardfehler der Schätzung bzw. ist gleich $\sqrt{\frac{\sum (Y - Y')^2}{n - 2}}$

$t_{(n-2)}$ ist der kritische, dem verlangten Signifikanzniveau entsprechende t-Wert bei (n - 2) Freiheitsgraden

Vertrauensintervall der 'wahren' Steigung ' β ' der Grundgesamtheit

$$\beta = b \pm t_{(n-2)} \cdot \frac{SEE}{\sqrt{\sum (X - \bar{X})^2}}$$

β steht für die 'wahren' Steigung (der Grundgesamtheit)

$\bar{X}$ steht für das arithmetische Mittel der X-Werte

SEE steht den Standardfehler der Schätzung bzw. ist gleich $\sqrt{\frac{\sum (Y - Y')^2}{n - 2}}$

$t_{(n-2)}$ ist der kritische, dem verlangten Signifikanzniveau entsprechende t-Wert bei (n - 2) Freiheitsgraden

Das Vertrauensintervall für die 'wahre' Einzel-Prognose Y^* (bei gegebenem X^*)

$$Y^* = Y'^* \pm t_{(n-2)} \cdot SEE \cdot \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(X^* - \bar{X})^2}{\sum (X - \bar{X})^2}}$$

Y^* steht für den 'wahren' Prognosewert (der Grundgesamtheit) bei gegebenem X^*

Y'^* ist der Prognosewert (bei gegebenem X^*) gemäss den Parametern a_0 und b

X^* ist der für die Prognose gegebene X-Wert

SEE steht den Standardfehler der Schätzung bzw. ist gleich $\sqrt{\frac{\sum (Y - Y')^2}{n - 2}}$

$t_{(n-2)}$ ist der kritische, dem verlangten Signifikanzniveau entsprechende t-Wert bei (n - 2) Freiheitsgraden

Test-Statistiken bzw. Prüfgrößen bezüglich des 'wahren' Achsenabschnitts ' α_0 ' bzw. der 'wahren' Steigung ' β ' (der Grundgesamtheit)

$$\text{für } \alpha_0: t_{(n-2)}^* = \frac{a_0}{\frac{SEE \cdot \sqrt{\frac{\sum X^2}{n \cdot \sum (X - \bar{X})^2}}}{b}}$$

$$\text{für } \beta: t_{(n-2)}^* = \frac{b}{\frac{SEE}{\sqrt{\sum (X - \bar{X})^2}}}$$

- α_0 steht für den 'wahren' Achsenabschnitt (der Grundgesamtheit)
 a_0 steht für den 'geschätzten' Achsenabschnitt der Regressionsgeraden
 β steht für die 'wahren' Steigung (der Grundgesamtheit)
 b steht für die 'geschätzte' Steigung der Regressionsgeraden
 $\bar{X}$ steht für das arithmetische Mittel der X-Werte

SEE steht den Standardfehler der Schätzung bzw. ist gleich $\sqrt{\frac{\sum (Y - Y')^2}{n - 2}}$

$t_{(n-2)}^*$ steht für die standardisierte Prüfgröße bzw. Test-Statistik bezüglich T-Verteilung bei $(n - 2)$ Freiheitsgraden

Multiple Regressionsgerade

$$Y' = a_0 + b_1 \cdot X_1 + b_2 \cdot X_2 \dots + b_k \cdot X_k$$

- Y' steht für den geschätzten Wert der abhängigen Y-Variable bezüglich der gewählten X-Werte $[X_1, X_2 \dots X_k]$
 a_0 ist der Achsenabschnitt der linearen Gleichung, wenn alle X-Werte gleich Null sind
 $b_1, b_2 \dots b_k$ ist die jeweilige Steigung - auch Regressionskoeffizienten genannt, d.h. wieviel sich durchschnittlich der geschätzte Wert von Y' durch eine Veränderung lediglich einer Einheit von X_1 bzw. X_2 bzw. $\dots X_k$ verändert
 $X_1, X_2 \dots X_k$ ist jeder gewählte Wert der unabhängigen Variablen ' X_1 ' bzw. ' X_2 ' bzw. $\dots$ ' X_k '

Null-Hypothese (und somit auch Alternativ-Hypothese) bezüglich der 'wahren' Regressionskoeffizienten

$$H_0 = \beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_k = 0$$

$$H_1 = \text{nicht alle } \beta\text{'s sind Null}$$

Test-Statistik bzw. Prüfgrösse bezüglich der 'wahren' Regressionskoeffizienten

$$F_{(k; n-k-1)}^* = \frac{r^2}{(1-r^2)} \cdot \frac{(n-k-1)}{k} \quad \text{bzw.} \quad \frac{SSR}{SSE} \cdot \frac{(n-k-1)}{k}$$

r^2 ist der Determinationskoeffizient

SSR ist die Quadratsumme der Regressionsabweichung
bzw. $\sum (Y' - \bar{Y})^2$

SSE ist die Quadratsumme der Residuenabweichung
(auch als ε bezeichnet) bzw. $\sum (Y - Y')^2$

Capital Asset Pricing Modell (CAPM)

$$E(R_i) = R_F + \beta_i \cdot [E(R_M) - R_F]$$

$E(R_i)$ steht für die erwartete Rendite der Investition 'i'

R_F ist die risikolose Rendite

$E(R_M)$ ist die erwartete Rendite des Markt-Portefeuilles

β_i ist die Sensitivität oder Beziehung der Rendite der Investition 'i' bezüglich der Rendite des Markt-Portefeuilles

$[E(R_M) - R_F]$ wird auch Markt-Risiko-Prämie (market risk premium) genannt

ZEITREIHENANALYSE UND PROGNOSE – Kapitel 11Additive Zeitreihenmodell

$$Y = T + S + I$$

Y sind die beobachteten Werte einer Zeitreihe

T ist die langfristige, überjährige Trend-Komponente

S ist die saisonale, unterjährig wiederkehrende Komponente

I ist die irreguläre, rein zufällige Residualkomponente

Multiplikative Zeitreihenmodell

$$Y = T \cdot S \cdot I$$

Abbildungs- und Tabellenverzeichnis

Abb. 1: Visuelle Irreführung bezgl. Grösse versus Fläche	5
Abb. 2: Visuelle Irreführung bezgl. Werteskala	5
Abb. 3: Urliste Häufigkeitsverteilung	7
Abb. 4: Rangliste Häufigkeitsverteilung, aufsteigend sortiert	8
Abb. 5: Häufigkeits- oder Frequenztabelle	8
Abb. 6: Gruppierte Häufigkeitstabelle	9
Abb. 7: Histogramm und Polygonzug	10
Abb. 8: Urliste Stamm-und-Blatt-Diagramm	12
Abb. 9: Rangliste Stamm-und-Blatt-Diagramm, aufsteigend sortiert	12
Abb. 10: Tabelle Stamm-und-Blatt-Diagramm, ausgewertet	13
Abb. 11: Liniendiagramm Aktienkursverlauf	13
Abb. 12: Liniendiagramm Entwicklung Arbeitslosenrate USA	14
Abb. 13: Balkendiagramm Motorfahrzeug-Treibstoffverbrauch USA	15
Abb. 14: Kreisdiagramm Energiekonsum-Struktur USA	16
Abb. 15: Aktien-Portefeuille von Samula Waagener 2011 und 2015	20
Abb. 16: Ungewogener Index (2015) Aktien-Portefeuille von Samuel Wagner	20
Abb. 17: Gewogene Indizes Aktien-Portefeuille (2015) von Samuel Wagner	22
Abb. 18: Wert-Index Aktien-Portefeuille (2015) von Samuel Wagner	22
Abb. 19: Zusammenhang Laspeyres-, Paasche- und Wert-Index	23
Abb. 20: Entwicklung Preisindizes NYSE U.S. 100 und des DJIA	24
Abb. 21: 'Umbasierte' Indizes NYSE U.S. 100 und DJIA	24
Abb. 22: Zwei Reihen des Konsumentenpreisindex	25
Abb. 23: 'Verkettete' Konsumentenpreisindizes	25
Abb. 24: Veränderungen Aktienkurse von vier Aktien	27
Abb. 25: Aktienkurs-gewichteter Aktienkurs-Index	28
Abb. 26: Börsenkapitalisierungs-gewichteter Aktienkurs-Index	28
Abb. 27: Aktienkurs-Index ohne Gewichtung	28
Abb. 28: Einfaches arithmetisches Mittel der Kilometerstände von fünf PKW	33
Abb. 29: Einfaches arithmetisches Mittel der Boni von fünf Manager	34
Abb. 30: Gewogenes arithmetisches Mittel der Boni von fünf Manager	34
Abb. 31: Median der Boni von fünf Manager	35
Abb. 32: Median der Boni von sechs Manager	35
Abb. 33: Modus der Boni von fünf Manager	36
Abb. 34: Jährliches Umsatzwachstum eines Unternehmens	37
Abb. 35: Geometrische Mittel jährliches Umsatzwachstum eines Unternehmens	37
Abb. 36: Spannweite der Boni von fünf Manager	39
Abb. 37: 1. und 3. Quartil der Boni von fünf Manager	40
Abb. 38: Mittlere bzw. durchschnittliche absolute Abweichung der Boni von fünf Manager	41
Abb. 39: Standardabweichung der Boni von fünf Manager	43
Abb. 40: Drei Grundtypen der Verteilung	46
Abb. 41: Baumdiagramm Qualitäts-Kontroll-System	55
Abb. 42: Baumdiagramm Ausschuss- und Produktionsanteile von drei Maschinen	56
Abb. 43: Baumdiagramm Test auf Krebs (erster Test)	57
Abb. 44: Baumdiagramm Test auf Krebs (zweiter Test)	58
Abb. 45: Ergebnistabelle über Nettoeinnahmen des Gemüsehändlers	60
Abb. 46: Absatzmengen der Klarient AG	61
Abb. 47: Ergebnistabelle Deckungsbeiträge der Klarient AG	62
Abb. 48: Nettoeinnahmen-Matrix Gemüsehändler (ohne Unsicherheit)	64
Abb. 49: Ergebnistabelle Nettoeinnahmen des Hotelbesitzers	65
Abb. 50: Ergebnistabellen Nettoeinnahmen des Hotelbesitzers bei Situation I, II, III	66

Abb. 51: Mögliche Fälle eines Münzen-Experiments	70
Abb. 52: Zufallsverteilung der Anzahl 'Köpfe' des Münzen-Experiment	71
Abb. 53: Wahrscheinlichkeiten des Münzen-Experiments	71
Abb. 54: Ausgewählte Binomialverteilungen mit 10 Versuchen	74
Abb. 55: Ausgewählte Binomialverteilungen mit $\pi = .10$	75
Abb. 56: Ausgewählte Poissonverteilungen	79
Abb. 57: (Standard-)Normalverteilung	81
Abb. 58: Ausgewählte Normalverteilungen	82
Abb. 59: Normalverteilung Value-at-Risk (VaR) eines Bond-Portefeuilles	84
Abb. 60: Gegenüberstellung ausgewählte T-Verteilungen mit der Standardnormalverteilung	86
Abb. 61: Ausgewählte Chi-Quadratverteilungen	88
Abb. 62: Tabelle festgestellte Befragungsergebnisse	89
Abb. 63: Tabelle erwartete Befragungsergebnisse	90
Abb. 64: Tabelle Ermittlung Prüfgrösse Befragungsergebnisse	90
Abb. 65: Ausgewählte F-Verteilungen	92
Abb. 66: Zusammenhang Grundgesamtheit und Stichprobe	95
Abb. 67: Zufallszahlen zwischen Null und 100'000	97
Abb. 68: Urliste Dienstalter Mitarbeiter	99
Abb. 69: Histogramm Dienstalter Mitarbeiter	99
Abb. 70: Normalverteilung des durchschnittlichen Jahres-Einkommens aller Manager	103
Abb. 71: Entscheidungsregel einseitiger Hypothesentest	112
Abb. 72: Entscheidungsregel zweiseitiger Hypothesentest	113
Abb. 73: Fehler des Typs I (α) und Typ II (β)	114
Abb. 74: Normalverteilung der durchschnittlich unbezahlten (Kredit-)Beträge	116
Abb. 75: Galton's regress 'towards the mean'	119
Abb. 76: Streudiagramme beispielhaft verschiedene Korrelationen	120
Abb. 77: Streudiagramme gute und weniger gute Korrelation	121
Abb. 78: Verdeutlichung Determinationskoeffizient	125
Abb. 79: Tabelle Zusammenhang Anzahl Team-Mitglieder und Anzahl produzierte Einheiten	126
Abb. 80: Streudiagramm Anzahl Team-Mitglieder und Anzahl produzierte Einheiten	126
Abb. 81: Tabelle Berechnungen ' r ', ' r^2 ' und Prüfgrösse von ' r '	127
Abb. 82: Illustration Methode der kleinsten Quadrate	128
Abb. 83: Tabelle Berechnung ' b ', ' a_0 ' und geschätzte Y -Werte	130
Abb. 84: Illustration Regressionsgerade und Standardfehler der Schätzung	132
Abb. 85: Tabelle Berechnung SEE, Prüfgrösse ' α_0 ' und ' β ' sowie Vertrauensintervall ' Y^* '	135
Abb. 86: Vertrauensintervallgrenze für die 'wahre' Prognose Y^*	136
Abb. 87: Zusammenhang Heizkosten und drei Einflussfaktoren	138
Abb. 88: Auswertung Regressions-Statistik und Varianz-Analyse Heizkosten 3 Einflussfaktoren	139
Abb. 89: Auswertung Regressions-Statistik und Varianz-Analyse Heizkosten 2 Einflussfaktoren	141
Abb. 90: Schematische Vorgehensweise bei (multipler) Regressions-Analyse	142
Abb. 91: Unterschied additives und multiplikatives Modell	150
Abb. 92: Berechnungsbeispiel 'zentrierter' gleitender Durchschnitt	151
Abb. 93: Tabelle Umsatzentwicklung Industrie-Unternehmen	153
Abb. 94: Umsatzentwicklung Industrie-Unternehmen	154
Abb. 95: 'Zentrierte' gleitende Quartals-Durchschnitte Industrie-Unternehmen	154
Abb. 96: Tabelle Berechnungen multiplikatives Zeitreihen-Modell	155
Abb. 97: Tabelle Berechnung Saisonfaktoren bei multiplikativem Zeitreihen-Modell	155
Abb. 98: Saisonalisierte Trendgerade und Prognose bei multiplikativem Zeitreihen-Modell	156
Abb. 99: Saisonfaktoren und Residualkomponenten bei multiplikativem Zeitreihen-Modell	156
Abb. 100: Tabelle Berechnungen Additives Zeitreihen-Modell	157
Abb. 101: Tabelle Berechnung Saisonabweichungen Additives Zeitreihen-Modell	157
Abb. 102: Saisonalisierte Trendgerade und Prognose Additives Zeitreihen-Modell	158
Abb. 103: Saisonabweichungen und Residualkomponente Additives Zeitreihen-Modell	158
Abb. 104: Tabelle Gewichtung beobachtete Zeitreihenwerte, abweichende Glättungsparameter	160
Abb. 105: Exponentielles Glätten, einfaches Modell	161

Abb. 106: Exponentielles Glätten, Modell nach Holt	162
Abb. 107: Exponentielles Glätten, Modell nach Holt-Winters	163
Abb. 108: Stationäre und nicht-stationäre Zeitreihenwerte	165
Abb. 109: Schematische Vorgehensweise zur Bestimmung der ARIMA-Modell-Parameter	167
Abb. 110: Monatliche Anzahl Bahngäste von 1989 bis 2000 einer Eisenbahngesellschaft	168
Abb. 111: Stationäre Entwicklung Anzahl Bahngäste (1. Stufe)	168
Abb. 112: Stationäre Entwicklung Anzahl Bahngäste (2. Stufe)	169
Abb. 113: ACF- und PACF-Entwicklung Anzahl Bahngäste	169
Abb. 114: ACF- und PACF-Entwicklung Anzahl Bahngäste mit 'Lag' 12 und Vielfaches	170
Abb. 115: 'Saisonalisiertes' ARIMA-Modell Entwicklung Anzahl Bahngäste	171
Abb. 116: ACF und PACF 'saisonalisiertes' ARIMA-Modell Anzahl Bahngäste	171
Abb. 117: 'Komplettes' ARIMA-Modell Entwicklung Anzahl Bahngäste	172
Abb. 118: ACF und PACF 'komplettes' ARIMA-Modell Entwicklung Anzahl Bahngäste	172

Fachwörter Deutsch - Englisch

Achsenabschnitt	intercept
additives Modell	additiv model
Alternativ-Hypothese	alternative hypothesis
Anfangswerte	initial values
Annahme	assumption
ANOVA bzw. Varianzanalyse	analysis of variance
arithmetisches Mittel	arithmetic mean
Ausreisser	outlier
Aussage	statement
Autokorrelation	serial correlation
Autokorrelation bzw. ACF	auto correlation function
Baumdiagramm	tree diagram
Behauptung	claim
Binomialverteilung	binomial probability distribution
Chi-Quadratverteilung	Chi-square distribution
darstellen	presenting
Daten-Niveau mit Intervall	interval level data
Daten-Niveau mit Verhältniswert	ratio level data
Determinationskoeffizient	coefficient of determination
diskret	discrete
diskrete Zufallsverteilungen	discrete probability distributions
ein- und zweiseitige Signifikanztests	one-tailed and two-tailed tests of significance
einfache Zufallsstichprobe	simple random sampling
einfacher Durchschnitt	average
empirisches Gesetz	empirical rule
Entscheidungsregel	decision rule
Ereignisse	events
Ergebnistabelle	contingency table
Erwartungswert	expected value
exponentielles Glätten	exponential smoothing
Fälle	outcomes
Fehler des Typs I und Typs II	type I error and type II error
Freiheitsgrade	degrees of freedom
F-Verteilung	F distribution
gegenseitig ausschliessend	mutually exclusive
geometrisches Mittel	geometric mean
Gesetz der unwahrscheinlichen Ereignisse	law of improbable events
gewogener Index	weighted index
gewogenes arithmetisches Mittel	weighted mean
gleitender Durchschnitt	moving average
gleitender Durchschnitt zentriert	centered moving average
glockenförmig	bell-shaped
grafische Darstellung	graphic presentation
Grundgesamtheit	population
Gültigkeit	validity
Häufigkeitspolygon	frequency polygon
Häufigkeitsverteilung	frequency distribution

Heteroskedastizität	heteroscedasticity
Histogramm	histogram
hypergeometrische Zufallsverteilung	hypergeometric probability distribution
Hypothese	hypothesis
Hypothesentest	test of hypothesis
Hypothesentest	hypothesis testing
Indexzahlen	index numbers
interner (jährlicher) Ertragssatz	yield
Kategorien	categories
Kategorienintervalle	class intervals
Kategorienmitten	class midpoints
Kennzahlen der Streuung	measures of dispersion
Klumpen bzw. Teilmengen	strata
Klumpenzufallsstichprobe	stratified random sampling
Konfidenz- bzw. Vertrauensintervall	confidence interval
Korrelations-Analyse	correlation analysis
Korrelationskoeffizient	coefficient of correlation
Kostentreiber	cost driver
Kovarianz	covariance
Kreis-Diagramm	pie charts
Linien-Diagramme	line charts
Masszahl der zentralen Tendenz	measure of central tendency
Median	median
Methode der kleinsten Quadrate	least-squares method
Methode des gleitenden Durchschnitts	moving-average method
Minimax- oder Extremwert-Methode	high-low method
Mittelwerte	measures of location
mittlere bzw. durchschnittliche absolute Abweichung vom arithmetischen Mittel	mean deviation
Modus	mode
Möglichkeit des Auftretens	chance or likelihood
Möglichkeiten-Tabelle	contingency table
Multikollinearität	multicollinearity
multiplikatives Modell	multiplicative model
Muster; Schema	pattern
negative Schiefe	negative skewness
nichtparametrische Tests	nonparametric tests
Nicht-Zufallsstichprobe	nonprobability sampling
Niveau der Messung	level of measurement
nominales Daten-Niveau	nominal level data
Normalverteilung	normal probability distribution
Null-Hypothese	null hypothesis
ordinales Daten-Niveau	ordinal level data
partielle Autokorrelation bzw. PACF	p artial a uto c orrelation f unction
Poissonverteilung	poisson probability distribution
Polygonzug	frequency polygon
positive Schiefe	positive skewness
Prognose	forecasting
p-Wert	p-value
p-Wert	significance
Quartil	quartile
Regression und Korrelation	regression and correlation

Regressions-Analyse	regression analysis
Regressionskoeffizient	regression coefficient
relevanter Bereich	relevant range
Residual-Komponente	irregular component
saisonale Komponente	seasonal component
saisonbereinigt	seasonally adjusted
sammeln	collecting
Säulen- und Balken-Dia- gramme	vertical and horizontal bar charts
Schema	pattern
schief	skewed
Schiefte	skewness
Sharpe-Kennzahl	Sharpe ratio
sich gegenseitig ausschliessen	mutually exclusive
Signifikanzniveau	level of significance
Signifikanztest	test of significance
Spalten	columns
Spannweite	range
Stamm-und-Blatt-Diagramm	stem-and-leaf display
Standardabweichung	standard deviation
Standardfehler	standard error
Standardfehler der Schätzung	standard error of estimate or SEE
Standardnormalverteilung	standard normal probability distribution
stationäre Zeitreihenwerte	stationary series
Statistik	statistics
statistisch	empirical
statistische Schlussfolgerungen	inferences
Steigung	slope
stetig	continuous
stetige Zufallsverteilungen	continuous probability distribution
Stichprobe	sample
Stichprobentheorie und Stichprobenverteilun- gen	sampling methods and sampling distribu- tions
Streudiagramm	scatterplot
Student-Verteilung	student's t distribution
subjektiv	subjective
systematische Abweichung	bias
systematische Zufallsstichprobe	systematic random sampling
Tabelle	table
Test-Statistik	test statistic
Trend-Komponente	trend
Tschebyscheffsches Theorem	Chebyshev's theorem
T-Verteilung	student's t distribution
umbasieren	shifting the base
unechte Korrelation	spurious correlation
ungewogener Index	unweighted index
ungewogener Index	simple aggregate index
Urliste	ungrouped data
Urliste	raw material
Varianz	variance
Varianzanalyse bzw. ANOVA	analysis of variance
Variationskoeffizient	coefficient of variation
Vernünftigkeit	reasonableness

vollständig	exhaustive
Wahrscheinlichkeitsrechnung	probability
weisses Rauschen	white noise
Wertbeeinträchtigung	impairment
Wert-Index	value index
wirksamer	more effective
Zeilen	rows
Zeitreihenanalyse	time series
zentraler Grenzwertsatz	central limit theorem
Zufallsstichprobe	probability sampling
Zufallsvariable	random variable
Zulässigkeit	validity
zusammentragen	collecting
zyklische Komponente	cyclic component

Fachwörter Englisch - Deutsch

additiv model	additives Modell
alternative hypothesis	Alternativ-Hypothese
analysis of variance	ANOVA bzw. Varianzanalyse
analysis of variance	Varianzanalyse bzw. ANOVA
arithmetic mean	arithmetisches Mittel
assumption	Annahme
auto correlation function	Autokorrelation bzw. ACF
average	einfacher Durchschnitt
bell-shaped	glockenförmig
bias	systematische Abweichung
binomial probability distribution	Binomialverteilung
categories	Kategorien
centered moving average	gleitender Durchschnitt zentriert
central limit theorem	zentraler Grenzwertsatz
chance or likelihood	Möglichkeit des Auftretens
Chebyshev's theorem	Tschebyscheffsches Theorem
Chi-square distribution	Chi-Quadratverteilung
claim	Behauptung
class intervals	Kategorienintervalle
class midpoints	Kategorienmitten
coefficient of correlation	Korrelationskoeffizient
coefficient of determination	Determinationskoeffizient
coefficient of variation	Variationskoeffizient
collecting	sammeln
collecting	zusammentragen
columns	Spalten
confidence interval	Konfidenz- bzw. Vertrauensintervall
contingency table	Ergebnistabelle
contingency table	Möglichkeiten-Tabelle
continuous	stetig
continuous probability distribution	stetige Zufallsverteilungen
correlation analysis	Korrelations-Analyse
cost driver	Kostentreiber
covariance	Kovarianz
cyclic component	zyklische Komponente
decision rule	Entscheidungsregel
degrees of freedom	Freiheitsgrade
discrete	diskret
discrete probability distributions	diskrete Zufallsverteilungen
empirical	statistisch
empirical rule	empirisches Gesetz
events	Ereignisse
exhaustive	vollständig
expected value	Erwartungswert
exponential smoothing	exponentielles Glätten
F distribution	F-Verteilung
forecasting	Prognose
frequency distribution	Häufigkeitsverteilung
frequency polygon	Häufigkeitspolygon

frequency polygon	Polygonzug
geometric mean	geometrisches Mittel
grafic presentation	grafische Darstellung
heteroscedasticity	Heteroskedastizität
high-low method	Minimax- oder Extremwert-Methode
histogram	Histogramm
hypergeometric probability distribution	hypergeometrische Zufallsverteilung
hypothesis	Hypothese
hypothesis testing	Hypothesentest
law of improbable events	Gesetz der unwahrscheinlichen Ereignisse
impairment	Wertbeeinträchtigung
index numbers	Indexzahlen
inferences	statistische Schlussfolgerungen
initial values	Anfangswerte
intercept	Achsenabschnitt
interval level data	Daten-Niveau mit Intervall
irregular component	Residual-Komponente
least-squares method	Methode der kleinsten Quadrate
level of measurement	Niveau der Messung
level of significance	Signifikanzniveau
line charts	Linien-Diagramme
mean deviation	mittlere bzw. durchschnittliche absolute Abweichung vom arithmetischen Mittel
measure of central tendency	Masszahl der zentralen Tendenz
measures of dispersion	Kennzahlen der Streuung
measures of location	Mittelwerte
median	Median
mode	Modus
more effective	wirksamer
moving average	gleitender Durchschnitt
moving-average method	Methode des gleitenden Durchschnitts
multicollinearity	Multikollinearität
multiplicative model	multiplikatives Modell
mutually exclusive	gegenseitig ausschliessend
mutually exclusive	sich gegenseitig ausschliessen
negative skewness	negative Schiefe
nominal level data	nominales Daten-Niveau
nonparametric tests	nichtparametrische Tests
nonprobability sampling	Nicht-Zufallsstichprobe
normal probability distribution	Normalverteilung
null hypothesis	Null-Hypothese
one-tailed and two-tailed tests of significance	ein- und zweiseitige Signifikanztests
ordinal level data	ordinales Daten-Niveau
outcomes	Fälle
outlier	Ausreisser
partial auto correlation function	partielle Autokorrelation bzw. PACF
pattern	Muster; Schema
pattern	Schema
pie charts	Kreis-Diagramm
poisson probability distribution	Poissonverteilung
population	Grundgesamtheit

positive skewness	positive Schiefe
presenting	darstellen
probability	Wahrscheinlichkeitsrechnung
probability sampling	Zufallsstichprobe
p-value	p-Wert
quartile	Quartil
random variable	Zufallsvariable
range	Spannweite
ratio level data	Daten-Niveau mit Verhältniswert
raw material	Urliste
reasonableness	Vernünftigkeit
regression analysis	Regressions-Analyse
regression and correlation	Regression und Korrelation
regression coefficient	Regressionskoeffizient
relevant range	relevanter Bereich
rows	Zeilen
sample	Stichprobe
sampling methods and sampling distributions	Stichprobentheorie und Stichprobenverteilungen
scatterplot	Streudiagramm
seasonal component	saisonale Komponente
seasonally adjusted	saisonbereinigt
serial correlation	Autokorrelation
Sharpe ratio	Sharpe-Kennzahl
shifting the base	umbasieren
significance	p-Wert
simple aggregate index	ungewogener Index
simple random sampling	einfache Zufallsstichprobe
skewed	schief
skewness	Schiefe
slope	Steigung
spurious correlation	unechte Korrelation
standard deviation	Standardabweichung
standard error	Standardfehler
standard error of estimate or SEE	Standardfehler der Schätzung
standard normal probability distribution	Standardnormalverteilung
statement	Aussage
stationary series	stationäre Zeitreihenwerte
statistics	Statistik
stem-and-leaf display	Stamm-und-Blatt-Diagramm
strata	Klumpen bzw. Teilmengen
stratified random sampling	Klumpenzufallsstichprobe
student's t distribution	Student-Verteilung
student's t distribution	T-Verteilung
subjective	subjektiv
systematic random sampling	systematische Zufallsstichprobe
table	Tabelle
test of hypothesis	Hypothesentest
test of significance	Signifikanztest
test statistic	Test-Statistik
time series	Zeitreihenanalyse
tree diagram	Baumdiagramm

trend	Trend-Komponente
type I error and type II error	Fehler des Typs I und Typs II
ungrouped data	Urliste
unweighted index	ungewogener Index
validity	Gültigkeit
validity	Zulässigkeit
value index	Wert-Index
variance	Varianz
vertical and horizontal bar charts	Säulen- und Balken-Diagramme
weighted index	gewogener Index
weighted mean	gewogenes arithmetisches Mittel
white noise	weisses Rauschen
yield	interner (jährlicher) Ertragssatz

Glossar

Aktienkurs- gewichteter Aktienkurs-Index

Der Aktienkurs-gewichtete Aktienkurs-Index ist die Summe aller im 'Warenkorb' sich befindenden Aktienkurse dividiert durch die Anzahl im 'Warenkorb' vertretenen Aktien bzw. Gesellschaften.

Aktienkurs-Index ohne Gewichtung

Der Aktienkurs-Index ohne Gewichtung ist das einfache arithmetische oder geometrische Mittel aus den Aktienkurseinzelindizes aller im 'Warenkorb' vertretenen Aktien bzw. Gesellschaften.

Alternativ-Hypothese

Die Alternativ-Hypothese beschreibt, welchen Schluss man zieht, wenn die Null-Hypothese verneint wird (Bezeichnung: ' H_1 ').

ARIMA-Modell

Ein ARIMA-Modell wird mit drei kleinen ganzen Zahlen 'p', 'd' und 'q' beschrieben, wobei 'p' den Grad der Autoregression, 'd' den Grad der Differenzierung und 'q' die Ordnung des gleitenden Durchschnitts bedeuten. ARIMA steht für 'AR' (Autoregressive) 'I' (Integrated) 'MA' (Moving Average).

Autokorrelation

Autokorrelation besteht dann, wenn die Residuen untereinander korrelieren bzw. die beobachteten 'Y'-Werte einen Zusammenhang bzw. Abhängigkeit untereinander aufweisen.

Autokorrelation bzw. ACF

Unter einer Autokorrelation versteht man die Korrelation bzw. den Zusammenhang zwischen den Werten einer Zeitreihe mit ihren nachfolgenden Werten. Das Ausmass der Verzögerung (auch 'Lag' genannt) bestimmt dabei die Ordnung der Autokorrelation.

Autoregressive Komponente

Die autoregressive Komponente 'p' erklärt jeden Wert als Funktion seiner Vorgänger.

Beziehungszahlen

Zwei wesensverschiedene, aber in sinnvollem Zusammenhang stehende Grössen werden in Beziehung gesetzt und als Beziehungszahlen bezeichnet.

Binomialverteilung

Die Binomialverteilung ist ein Beispiel für eine diskrete Zufallsverteilung. Sie weist folgende Eigenschaften auf: Es gibt nur zwei sich gegenseitig ausschliessende auftretende Fälle bei jedem Experiment-Versuch; Die Wahrscheinlichkeit eines 'Erfolges' bzw. 'Misserfolges' bleibt bei jedem Versuch gleich gross; Die Versuche sind unabhängig voneinander.

Börsenkapitalisierungsgewichteter Aktienkurs-Index

Der Börsenkapitalisierungsgewichtete Aktienkurs-Index ist die aktuelle Summe aller im 'Warenkorb' sich befindenden Börsenkapitalisierungen dividiert durch die Summe aller im 'Warenkorb' sich befindenden Börsenkapitalisierungen zum Basiszeitpunkt.

Chiquadratverteilung

Die 'Chiquadratverteilung' weist folgende Eigenschaften auf: Sie ist nie negativ, sieht – je nach Anzahl Kategorien – anders aus, hat eine positive Schiefe bzw. ist rechtsschief oder linkssteil. Bei zunehmender Anzahl Kategorien konvergiert sie in die Standardnormalverteilung.

Daten-Niveau mit Intervall

Das Daten-Niveau mit Intervall weist alle Eigenschaften des ordinalen Daten-Niveaus auf. Zusätzlich sind aber die Abstände zwischen den Merkmalsausprägungen gleichbleibend bzw. gleich bedeutend.

Daten-Niveau mit Verhältniswert

Das Daten-Niveau mit Verhältniswert weist alle Eigenschaften des Daten-Niveaus mit Intervall auf. Zusätzlich hat aber die Merkmalsausprägung Null die Bedeutung des Nicht-Vorhanden-Seins, und das Verhältnis zwischen zwei Merkmalsausprägungen ist bedeutungsvoll.

Deskriptive bzw. beschreibende Statistik

Die deskriptive bzw. beschreibende Statistik befasst sich mit den Methoden des informativen Organisierens, Zusammenfassens und Darstellens von Daten. Es geht hier also lediglich darum, die Daten sinnvoll zu ordnen und zu präsentieren, nicht aber darum, 'Rückschlüsse' auf die 'Grundgesamtheit' zu ziehen.

Determinationskoeffizient

Der Determinationskoeffizient bzw. das Bestimmtheitsmass ist das Quadrat des Korrelationskoeffizienten. Anhand des Determinationskoeffizienten kann ausgesagt werden, wie viel Prozent der Streuung durch die Regression(sgeraden) 'erklärt' ist und – anhand der Ergänzung auf 1 bzw. 100 % – wie viel nicht 'erklärt' ist.

Diskrete Daten

Diskrete Daten können nur gewisse Werte annehmen und weisen normalerweise 'Lücken' zwischen den Werten auf. Diskrete Merkmalsausprägungen sind typischerweise das Resultat einer Zählung.

Diskrete Zufallsverteilung

Die diskreten Zufallsverteilungen haben die Eigenschaft, dass sich die Werte der auftretenden Fälle bzw. die Werte der Zufallsvariable klar voneinander abgrenzen.

Einfaches arithmetisches Mittel

Für Rohdaten berechnet sich das einfache arithmetische Mittel aus der Summe aller Werte dividiert durch die Anzahl der Werte in der Grundgesamtheit.

Einfache Zufallsstichprobe

Dabei wird die Stichprobe so gewonnen, dass jeder Merkmalsträger der Grundgesamtheit die gleiche Chance hat, in die Stichprobe aufgenommen zu werden.

Elementarindex bzw. Einzelindex

Der Elementarindex bzw. Einzelindex zeigt lediglich die Entwicklung eines Preises, einer Menge oder eines Wertes.

Empirisches Gesetz

Das empirische Gesetz besagt, dass für eine symmetrische, glockenförmig um das arithmetische Mittel angeordnete Verteilung der Werte des Daten-Sets rund 68 % der Werte im Bereich von $\mu \pm 1\sigma$, ca. 95 % der Werte im Bereich von $\mu \pm 2\sigma$, und praktisch alle Werte (bzw. 99.7 %) im Bereich von $\mu \pm 3\sigma$ anzutreffen sind.

Entscheidungsregel beim Hypothesentest

Die Entscheidungsregel beim Hypothesentest ist eine Aussage darüber, unter welchen Bedingungen die Null-Hypothese verworfen wird und unter welchen Bedingungen sie nicht verworfen wird.

Erwartungswert

Das arithmetische Mittel einer Zufallsverteilung wird als Erwartungswert bezeichnet.

Exponentielles Glätten

Exponentielles Glätten ist ein Verfahren, das bei autokorrelierten Zeitreihen, d. h. bei Werten einer Zeitreihe, die mit den (zeitlich) nachfolgenden Zeitreihenwerten einen Zusammenhang aufweisen, zufällige Schwankungen bzw. Störungen entfernt, um aufgrund der geglätteten Reihe bessere Aussagen über deren Verlauf machen zu können.

Fehler des Typs I bzw. Fehler des Typs II

Im Zusammenhang mit dem Signifikanzniveau (Fehler des Typs I bzw. ' α ' [Alpha]) stellt sich schnell auch die Frage, wie gross der Fehler ist, wenn die Null-Hypothese akzeptiert wird, obwohl letztere eigentlich falsch ist (Fehler des Typs II bzw. ' β ' [Beta]).

F-Verteilung

Die 'F-Verteilung' weist folgende Eigenschaften auf: Sie ist nie negativ, sieht – je nach Anzahl der Freiheitsgrade in Zähler und Nenner – anders aus, hat eine positive Schiefe bzw. ist rechtsschief oder linkssteil. Bei zunehmender Anzahl der Freiheitsgrade konvergiert sie in die Normalverteilung mit einem Wertebereich von Null bis plus unendlich.

Geometrisches Mittel

Das geometrische Mittel eines Daten-Sets von n (positiven) Werten ist die n -te Wurzel aus der Multiplikation aller n Werte miteinander.

Gewogener Index

Dieser Index weist eine Gewichtung auf und bezieht sich auf einen Zeitpunkt.

Gewogenes arithmetisches Mittel

Das gewogene arithmetische Mittel ist ein Spezialfall des einfachen arithmetischen Mittels. Dieser tritt immer dann auf, wenn mehrere Werte in einer Grundgesamtheit oder Stichprobe gleich gross und die Rohdaten in einer relativen oder absoluten Häufigkeitsverteilung aufgeführt sind.

Ordnung des gleitenden Durchschnitts

Die Ordnung des gleitenden Durchschnitts ' q ', hat ihre Ursache in der Störung bei den ' q ' vorhergehenden Werten; eine Störung von mehr als ' q ' Zeitpunkten hat demnach keinen Einfluss mehr.

Gleitender Durchschnitt

Der gleitende Durchschnitt ist eine Folge von arithmetischen Mitteln, die aus den beobachteten Werten der Zeitreihe ' Y ' gebildet werden. Dabei wird der gleitende Durchschnitt aus einer gleichbleibenden Anzahl zeitlich jeweils benachbarter Beobachtungswerte berechnet und dem 'in der Mitte' der Werte liegenden Zeitpunkt zugeordnet.

Gliederungszahl

Eine Teilgrösse wird zu ihrer Gesamtgrösse in Beziehung gesetzt. Das Ergebnis ist eine Anteilsangabe oder 'Quote' bzw. 'Rate'.

Grad der Differenzierung

Der Grad der Differenzierung ' d ' ist der Grad der Differenzenbildung, der nötig ist, um die betreffende Zeitreihe stationär zu machen.

Grundgesamtheit

Grundgesamtheit bedeutet die Sammlung aller möglichen Individuen, Objekte oder Messungen über ein Interessensgebiet.

Häufigkeitspolygon bzw. Polygonzug

Soll die Häufigkeitsverteilung grafisch dargestellt werden, so sind auf der X-Achse (Abszisse) die Beobachtungswerte bzw. Kategorienmitten, auf der Y-Achse (Ordinate) die Häufigkeit ihres Vorkommens darzustellen. Werden die so erhaltenen Punkte im X-Y-Diagramm miteinander verbunden, entsteht ein Häufigkeitspolygon bzw. Polygonzug.

Häufigkeitsverteilung

Eine Häufigkeitsverteilung entsteht dadurch, dass Daten in Kategorien – auch Klassen oder Gruppen genannt – eingeteilt werden. Dadurch wird die Anzahl Beobachtungen in den sich gegenseitig ausschließenden Kategorien ersichtlich.

Heteroskedastizität

Bedingte Heteroskedastizität besteht dann, wenn die Residuenabweichungen bzw. $(Y - Y')$ entlang der unabhängigen Variablen 'X' systematisch grösser oder kleiner werden.

Histogramm

Wird jeweils über die ganze Klassenbreite auf dem Niveau der Häufigkeit ihres Vorkommens eine horizontale Linie gezogen und verbindet man diese Linien zu einer 'Treppe', entsteht das Histogramm.

Hypergeometrische Zufallsverteilung

Die hypergeometrische Zufallsverteilung ist ein Beispiel für eine diskrete Zufallsverteilung und weist folgende Eigenschaften auf: Es gibt nur zwei sich gegenseitig ausschliessende auftretende Fälle bei jedem Experiment-Versuch; Die Wahrscheinlichkeit eines 'Erfolges' bzw. 'Misserfolges' bleibt bei jedem Versuch nicht gleich gross; Die Versuche sind unabhängig voneinander.

Hypothese

Eine Hypothese ist eine Aussage über eine Grundgesamtheit.

Hypothesentest

Der Hypothesentest beginnt mit einer Aussage oder einer Annahme über einen Parameter der Grundgesamtheit. Um die Gültigkeit bzw. Zulässigkeit der Aussage zu testen, muss (mindestens) eine Stichprobe aus der Grundgesamtheit gezogen werden. Aufgrund dieser Stichprobe wird nun anhand statistischer Methoden der Test bezüglich der Aussage über den Parameter der Grundgesamtheit durchgeführt.

Indexzahl

Eine Indexzahl ist eine Zahl, welche die relative Veränderung bezüglich Preis, Quantität oder Wert von einer Periode zu einer anderen ausdrückt.

Indexzahlen

Zwei inhaltlich gleichartige, sich auf verschiedene Zeitpunkte oder verschiedene geografische Orte beziehende Grössen werden in Beziehung gesetzt.

Induktive bzw. schliessende Statistik

Die induktive bzw. schliessende Statistik befasst sich mit den Methoden, die verwendet werden, damit etwas über die Grundgesamtheit aufgrund einer Stichprobe herausgefunden werden kann.

Irreguläre Komponente Die irreguläre Komponente widerspiegelt die Restgrösse bzw. die rein zufällige Residualkomponente, die nicht erklärt werden kann.

Kategorienintervalle

Die Kategorienintervalle sind so gegeneinander abzugrenzen, dass die Zuordnung der Beobachtungswerte klar hervorgeht bzw. kein Beobachtungswert mehr als einer Kategorie angehört, sie sich also gegenseitig ausschliessen. Zudem ist zu beachten, dass die Kategorienintervalle gleich gross sind.

Klassische Zeitreihenanalyse

Die 'klassische' Zeitreihenanalyse geht von einem klaren, intuitiv verständlichen Ansatz aus. Dabei werden die Quartals- bzw. Monats-Zeitreihen in drei Grund-Komponenten aufgeteilt, nämlich in eine langfristige, überjährige Trend-Komponente 'T', eine saisonale, unter- jährlich wiederkehrende Komponente 'S' und eine 'irreguläre', rein zufällige bzw. Rest- oder Residual-Komponente 'I'.

Klumpenzufallsstichprobe

Bei der Klumpenzufallsstichprobe wird die Grundgesamtheit zuerst in 'Klumpen' bzw. Teilmengen aufgeteilt. Anschliessend werden aus jedem dieser Klumpen bzw. Teilmengen Merkmalsträger für die Stichprobe ausgewählt.

Komplementäres Ereignis

Die Wahrscheinlichkeit des Auftretens eines Ereignisses plus die Wahrscheinlichkeit des Nicht-Auftretens dieses Ereignisses (komplementäres Ereignis) ergibt den Wert 1.0 oder 100 %.

Konfidenz- bzw. Vertrauensintervalle

Da man aus den Voraussetzungen weiss, dass bei genügend grosser Stichprobe ($n > 30$) die Stichprobenverteilung in eine Normalverteilung konvergiert, wird es möglich – anhand eines 'Umkehrschlusses' sowie der Standardnormalverteilung – Konfidenz- bzw. Vertrauensintervalle bezüglich der Grundgesamtheitsparameter vorzunehmen.

Korrelations-Analyse

Mit der Korrelations-Analyse bezeichnet man Methoden und Techniken, welche die 'Güte' der Beziehung bzw. den Zusammenhang von zwei Variablen misst. Dabei ist es üblich, dass auf der Abszisse (Horizontalen) – auch mit 'X' bezeichnet – die unabhängige Variable aufgezeichnet wird und auf der Ordinate (Vertikalen) – auch mit 'Y' bezeichnet die abhängige Variable.

Korrelationskoeffizient

Der Korrelationskoeffizient ist eine relative Kennzahl über die 'Güte' einer Korrelation mit folgenden Eigenschaften: Sie kann die Werte zwischen minus Eins und plus Eins annehmen; Eine perfekte negative Korrelation weist den Wert '-1' auf, eine perfekte positive Korrelation den Wert '+1'; Keine Korrelation wird durch den Wert '0' wiedergegeben.

Kreis-Diagramme

Kreis-Diagramme eignen sich besonders gut, um die Gliederung einer Summe von Merkmalsträgern darzustellen, indem der Kreis in Sektoren aufgeteilt wird, die im Verhältnis zu den relativen Häufigkeiten der Untergliederungen stehen. Dabei ist zu beachten, dass die Summe der Merkmalsträger gleich 360° ist.

Kritischer Wert

Den so genannten 'kritischen Wert' erhält man, indem entsprechend der beim Test unterstellten Verteilungsfunktion des Parameters der diesbezügliche, das Signifikanzniveau widerspiegelnde, standardisierte Wert ermittelt bzw. aus der entsprechenden Tabelle herausgelesen wird.

Laspeyres-Index

Gewogener Index mit Gewichtung zum Basiszeitpunkt.

Linien-Diagramme

Linien-Diagramme sind besonders geeignet, um den Verlauf einer Variable visuell aufzuzeichnen. Typischerweise werden die Werte der Variable auf der Y-Achse (Ordinate) und die entsprechende Zeitdimension auf der X-Achse (Abszisse) eingetragen.

Median

Der Median ist derjenige Wert, bei dem – nachdem das Daten-Set in auf- oder absteigender Reihenfolge geordnet wurde – sowohl 50 % der Datenvorkommnisse oberhalb als auch unterhalb zu liegen kommen bzw. der die Daten in zwei Hälften teilt.

Methode der kleinsten Quadrate

Bei der Methode der kleinsten Quadrate werden die vertikalen Abstandsquadrate zwischen den beobachteten 'Y'-Werten und den diesbezüglichen Werten auf der Regressionsgeraden bzw. die Residuenabweichungen ' ε ' minimiert.

Mittlere bzw. durchschnittliche absolute Abweichung

Die mittlere bzw. durchschnittliche absolute Abweichung vom arithmetischen Mittel berechnet sich aus dem arithmetischen Mittel der absoluten Abweichungen vom arithmetischen Mittel.

Modus

Der Modus ist derjenige Wert, der am häufigsten vorkommt.

Multiple Regressions- Analyse

Meist ist es so, dass nicht nur eine, sondern mehrere unabhängige Variablen die abhängige Variable beeinflussen. Für diesen Fall bedient man sich der so genannten 'multiplen Regressions-Analyse'. Dabei wird von der Linearitätsannahme nicht weggegangen, sondern diese wird auf alle abhängigen Variablen ausgedehnt.

Naive Prognose

Bei der so genannten 'naiven' Prognose wird nach dem Motto 'alles bleibt, wie es ist' der letzte beobachtete Zeitreihenwert (Y_t) als Prognosewert (Y_{t+1}) verwendet.

Nicht- Zufallsstichprobe

Nicht alle Merkmalsträger in der Grundgesamtheit haben eine Chance, in die Stichprobe aufgenommen zu werden.

Nominales Daten- Niveau

Beim nominalen Daten-Niveau können die Beobachtungen nur klassifiziert oder gezählt werden.

Normalverteilung

Die Normalverteilung weist folgende Eigenschaften auf: Sie ist glockenförmig, symmetrisch um das arithmetische Mittel verteilt und fällt vom Zentralwert in beide Richtungen leicht asymptotisch ab. Die (Eintritts-)Wahrscheinlichkeiten befinden sich zu rund 68% im Bereich von $\mu \pm 1\sigma$, zu ca. 95 % im Bereich von $\mu \pm 2\sigma$, und zu 99.7 % im Bereich von $\mu \pm 3\sigma$.

Null-Hypothese

Die Null-Hypothese ist eine Aussage, die nicht zurückgewiesen werden kann, wenn die Stichproben-Daten nicht genügend überzeugende Evidenz bereitstellen, dass die Null-Hypothese falsch ist.

Optimaler Stichprobenumfang

Der 'optimale' Stichprobenumfang hängt von drei Faktoren ab, nämlich vom Konfidenz- bzw. Vertrauensniveau der anzustrebenden Aussage, von der absoluten, maximal zulässigen Abweichung und von der Streuung der Grundgesamtheit.

Ordinales Daten- Niveau

Das ordinale Daten-Niveau weist alle Eigenschaften des nominalen Daten-Niveaus auf, doch können die (Unterteilungs-)Kategorien zusätzlich auf- oder absteigend, entsprechend ihrer inhaltlichen Bedeutung, in einer Rangfolge angeordnet werden.

Paasche-Index

Gewogener Index mit Gewichtung zum aktuellen Zeitpunkt 't'.

Partielle Autokorrelation bzw. PACF

Die partielle Autokorrelation misst den Zusammenhang zwischen den Werten einer Zeitreihe mit nachfolgenden Werten, wobei die Zusammenhänge der dazwischen liegenden Werte ausgeschaltet werden.

Poissonverteilung

Die Poissonverteilung ist eine diskrete Zufallsverteilung, weil hier Zählungen vorgenommen werden, und sie ist das Modell für ein vom Zufall abhängiges Ereignis, das innerhalb eines gegebenen Zeitintervalls nur wenige Male oder auch keinmal auftritt.

Primäre Daten

Die Daten werden speziell für die momentane Untersuchung und von der die Untersuchung durchführenden Stelle gesammelt.

Prüfgrösse

siehe 'Test-Statistik'

p-Wert

Aussage, wie gross bzw. klein die Wahrscheinlichkeit ist, dass die Null-Hypothese in jedem Fall angenommen würde.

Qualitative Daten

Wenn immer das charakteristische Merkmal nicht-numerisch ist, dann bezeichnet man dies als qualitativ.

Quantitative Daten

Wenn immer das charakteristische Merkmal numerisch erfasst werden kann, dann bezeichnet man dies als quantitative Daten.

Quartil (1. bzw. 3.)

Das 1. (bzw. 3.) Quartil ist derjenige Wert, bei dem – nachdem das Daten-Set in aufsteigender Reihenfolge geordnet wurde – 25 % der Datenvorkommnisse unterhalb (bzw. oberhalb) zu liegen kommen.

Saisonale Komponente

Die saisonale Komponente zeigt den wiederkehrenden Effekt innerhalb eines Jahres auf. Es wird davon ausgegangen, dass die saisonale Komponente exakt unterjährig wiederkehrend ist.

Säulen- und Balken- Diagramme

Säulen- und Balken-Diagramme eignen sich besonders gut, um visuell Daten von quantitativen Merkmalsausprägungen (Y-Achse bei Säulen-Diagramm) qualitativ sich unterscheidenden Merkmalen (X-Achse bei Säulen-Diagramm) gegenüberzustellen.

Schiefe

Die Verteilung der Werte eines Daten-Sets kann sehr unterschiedlich sein. Grundsätzlich unterscheidet man drei Typen der Verteilung, nämlich symmetrische Verteilung, Verteilung mit positiver Schiefe, Verteilung mit negativer Schiefe.

Sekundäre Daten

Man stützt sich auf bereits vorhandene Daten bei der Untersuchung.

Sharpe-Kennzahl

Sie misst die (Über-)Rendite pro Risiko-Einheit.

Signifikanzniveau

Unter dem Signifikanzniveau versteht man die Wahrscheinlichkeit, dass man die Null-Hypothese verwirft, obwohl sie tatsächlich 'wahr' ist. Das Signifikanzniveau wird mit ' α ' [Alpha] bezeichnet und manchmal auch Risikoniveau genannt.

Spannweite

Die Spannweite ist die Differenz zwischen dem höchsten und niedrigsten Wert im Daten-Set.

Stamm-und-Blatt- Diagramm

Das Stamm-und-Blatt-Diagramm ist eine der einfachsten Möglichkeiten, numerische Daten zu veranschaulichen. Die numerischen Merkmalsausprägungen werden dabei der Grösse nach geordnet und in einen Stamm- und einen Blattanteil zerlegt. Gleiche numerische Merkmalsausprägungen werden nicht durch ihre Häufigkeit, sondern direkt wiedergegeben. Damit ist es möglich, auch die Verteilung innerhalb von Kategorien zu betrachten.

Standardabweichung

Die Standardabweichung ist das gewogene arithmetische Mittel der Quadratabweichungen vom arithmetischen Mittel, aus dem man die Wurzel zieht.

Standardfehler der Schätzung

Da die beobachteten Y-Werte kaum je auf der Regressionsgeraden zu liegen kommen, ergibt sich ein 'Fehler der Schätzung'.

Standardnormalverteilung

Die Standardnormalverteilung 'z' hat die wichtige Eigenschaft, dass ihr arithmetisches Mittel bzw. der Erwartungswert ' μ ' immer gleich Null und ihre Standardabweichung ' σ ' immer gleich Eins ist.

Statistik

Unter 'Statistik' versteht man die Wissenschaft des Sammelns bzw. Zusammentragens, Organisierens, Darstellens, Analysierens und Interpretierens von Daten als Hilfsmittel, um wirksamere Entscheidungen treffen zu können.

Statistische Wahrscheinlichkeit

Wahrscheinlichkeit, die auf empirischen (Vergangenheits-)Messungen basiert.

Stetige Daten

Stetige Daten können jeden Wert innerhalb eines gewissen Bereiches annehmen.

Stetige Zufallsverteilung

Die stetigen Zufallsverteilungen haben die Eigenschaft, dass die auftretenden Fälle bzw. Zufallsvariable jeden Wert innerhalb gewisser Limiten annehmen können bzw. kann.

Stichprobe

Die Stichprobe ist ein (An-)Teil der Grundgesamtheit.

Student Verteilung

siehe 'T-Verteilung'

Subjektive Wahrscheinlichkeit

Wahrscheinlichkeit, die auf der persönlichen Anschauung bzw. Überzeugung des Entscheidungsträgers basiert.

Systematische Zufallsstichprobe

Die Merkmalsträger der Grundgesamtheit werden einer Methode nach geordnet. Rein zufällig wird der 'Startpunkt' für die Stichprobenauswahl festgelegt. Nun wird jeder x-te Merkmalsträger der Grundgesamtheit für die Stichprobe ausgewählt.

Tabelle

Eine geordnete Datensammlung wird auch als (statistische) Tabelle bezeichnet und ist die grundlegende statistische Wiedergabeform. Sie ist grundsätzlich der Ursprung für alle weiteren Darstellungsformen.

Test-Statistik

Die Test-Statistik ist ein – aufgrund der Informationen aus der Stichprobe – nach statistischen Methoden berechnete Prüfgrösse, mit dem Ziel festzustellen, ob die Null-Hypothese zu verwerfen ist.

Theoretische Wahrscheinlichkeit

Wahrscheinlichkeit, die unter ideal-typischen Bedingungen mathematisch abgeleitet wird.

Trend-Komponente

Die Trend-Komponente charakterisiert das langfristige Verhalten der Zeitreihen und ist üblicherweise eine lineare Funktion. Sie widerspiegelt das generelle überjährige Verhalten.

Tschebyscheffsches Theorem

Das Tschebyscheffsche Theorem besagt, dass unabhängig davon, wie die Verteilung der Werte im Daten-Set auch aussieht, mindestens 75 % der Werte im Bereich von $\mu \pm 2\sigma$, mindestens 89 % der Werte im Bereich von $\mu \pm 3\sigma$, und mindestens 94 % der Werte im Bereich von $\mu \pm 4\sigma$ anzutreffen sind.

T-Verteilung

Die 'T-Verteilung' weist folgende Eigenschaften auf: Sie weist grundsätzlich alle Eigenschaften der Standardnormalverteilung auf, hat zwar ein arithmetisches Mittel bzw. einen Erwartungswert von Null, doch unterscheidet sich die Standardabweichung je nach Stichprobenumfang. Bei zunehmendem Stichprobenumfang konvergiert sie in die Standardnormalverteilung.

Umbasieren

Das Umbasieren von Indexreihen entspringt dem Bedürfnis, mehrere Indexreihen mit unterschiedlichen Basiszeitpunkten ohne Zusatzberechnungen zu vergleichen.

Unabhängiges Ereignis

Zwei Ereignisse werden als voneinander unabhängig bezeichnet, wenn das Auftreten oder Nicht-Auftreten des einen Ereignisses die Wahrscheinlichkeit des Auftretens des anderen Ereignisses nicht beeinflusst.

Ungewogener Index

Index aus der Summe über eine Vielzahl von Preisen, Mengen oder Werten.

Urliste

Die Aufzeichnung von Daten oder Beobachtungswerten in der gleichen Reihenfolge, wie sie ermittelt wurden, nennt man Urliste.

Varianz

Wird die Standardabweichung quadriert, erhält man eine weitere Kennzahl der Streuung, nämlich die Varianz.

Variationskoeffizient

Der Variationskoeffizient ist das prozentuale Verhältnis der Standardabweichung zum arithmetischen Mittel.

Verhältniszahl

Die Verhältniszahl ist eine Masszahl, die durch Quotientenbildung entsteht, bzw. ist das Ergebnis der Division von zwei Zahlen.

Verketten

Unter Verketten von Indexreihen versteht man die Vorgehensweise, die gewählt wird, wenn bei gewogenen Indizes von Zeit zu Zeit ein neues Gewichtungsschema angewendet wird und eine Vergleichbarkeit, trotz dadurch entstehender 'Entwicklungsbrüche', hergestellt werden soll.

Wahrscheinlichkeit

Die Wahrscheinlichkeit ist eine Masszahl, welche die Möglichkeit des Auftretens eines Ereignisses aufzeigt. Diese Masszahl wird wie folgt definiert: Die Anzahl der günstigen, gleich möglichen Fälle dividiert durch die Anzahl aller potenziellen, gleich möglichen Fälle.

Weisses Rauschen

Jedes gute Prognose-Modell sollte (Vorhersage-)Fehler bzw. Residuenabweichungen aufweisen, die einem weissen Rauschen entsprechen, d. h. rein zufällig sind und von Periode zu Periode keinen Zusammenhang aufweisen. Die Residuenabweichung ermittelt sich aus dem beobachteten Zeitreihenwert minus dem dazugehörig berechneten Prognosewert des Modells.

Wert-Index

Dieser gibt sowohl die Veränderung in den Preisen als auch der Mengen wieder.

Zeitreihenanalyse

Das Hauptziel der Zeitreihenanalyse besteht darin, Prognosen für die Zukunft zu erstellen.

Dies bedingt aber, dass ein Modell 'kreiert' wird, welches das Verhalten der Zeitreihe charakterisiert.

Zentraler Grenzwertsatz

Der 'zentrale Grenzwertsatz' besagt, dass – für eine grosse Stichprobe – die Verteilung der arithmetischen Mittel der Stichproben sehr ähnlich einer Normalverteilung ist. Diese Approximation ist besser für grosse Stichproben als für kleine.

Zufallsstichprobe

Jeder Merkmalsträger in der Grundgesamtheit hat eine Chance, in die Stichprobe aufgenommen zu werden.

Zufallsverteilung

Eine Zufallsverteilung ist eine Auflistung der auftretenden Fälle in einem 'idealtypischen Experiment' mit der Angabe der diesbezüglichen Wahrscheinlichkeiten.

Literaturverzeichnis

- | | |
|---|--|
| BECK-BORNHOLDT, Hans-Peter; DUBBEN, Hans-Hermann, 1998 | Der Hund, der Eier legt. Erkennen von Fehlinformationen durch Querdenken. Reinbek bei Hamburg: Rowohlt Taschenbuch Verlag |
| BERENSON, Mark L.; LEVINE, David M.. 1986, ⁷ 1999 | Basic Business Statistics. Concepts and Applications. Upper Saddle River NJ: Prentice Hall |
| BOHLEY, Peter. ⁶ 1996 | Statistik. Einführendes Lehrbuch für Wirtschafts- und Sozialwissenschaftler. München: R. Oldenbourg Verlag |
| BOSCH, Karl. 1996 | Grundzüge der Statistik. Einführung mit Übungen. München: R. Oldenbourg Verlag |
| BOX, G. E. P.; JENKINS, G. M.; REINSELL, G. C.. ³ 1994 | Time Series Analysis: Forecasting and Control. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall |
| BRIGHAM, Eugene; HOUSTON, Joel F.. 1978, ⁸ 1998 | Fundamentals of Financial Management. Fort Worth: The Dryden Press |
| BÜHL, Achim; ZÖFEL, Peter. 1996 | Professionelle Datenanalyse mit SPSS für Windows. Bonn: Addison-Wesley Publishing Company |
| DAMODARAN, Aswath. 1997, ² 2001 | Corporate Finance. Theory and Practice. New York: John Wiley & Sons, Inc. |
| DEFUSCO, Richard A.; McLEAVEY, Dennis W.; PINTO, Jerald E.; RUNKLE, David E. 2001 | Quantitative Methods for Investment Analysis. Charlottesville, VA: Association for Investment Management and Research (AIMR) |
| DOPUCH, Nicholas; BIRNBERG, Jakob G.; DEMSKI, Joel S.. 1969, ² 1974 | Cost Accounting. Accounting Data for Management's Decisions. New York: Harcourt Brace Jovanovich, Inc |
| ECKSTEIN, Peter P. (Hrsg.). 1998 | Klausurtraining Statistik. Deskriptive Statistik, Wahrscheinlichkeitsrechnung, Induktive Statistik; mit kompletten Lösungen. Wiesbaden: Gabler |
| FASB, 1980 | Statement of Financial Accounting Concept No. 2. May 1980. Stamford Connecticut: FASB (Financial Accounting Standards Board) |
| HORNGREN, Charles T.. 1965, ⁵ 1981 | Introduction to Management Accounting. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice-Hall |
| HORNGREN, Charles T.; FOSTER, George; DATAR, Srikant M.. 1962, ⁹ 1997 | Cost Accounting. A Managerial Emphasis. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice-Hall |

HUNZIKER, Alois; SCHEERER, Fritz. ⁶ 1984	Statistik. Instrument der Betriebsführung. Zürich: Verlag des Schweizerischen Kaufmännischen Verbandes
MAKRIDAKIS, Spyros; WHEELWRIGHT, Steven C.; HYNDMAN, Rob J.. ³ 1998	Forecasting. Methods and Applications. New York: John Wiley & Sons, Inc.
MAGEE, Robert P.. 1986	Advanced Managerial Accounting. New York: Harper & Row, Publishers, Inc.
MARTIN, E. T.; FIRTH, J. R.. 1983	Statistics. Core Business Studies. London: Mitchell Beazley Publishers
MASON, Robert D.; LIND, Douglas A.; MARCHAL, William G.. 1967, ¹⁰ 2000	Statistical Techniques in Business and Economics. Boston: Irwin McGraw-Hill
MOOR, David S.; McCABE, George P.. 1989, ³ 1999	Introduction to the Practice of Statistics. New York: W. H. Freeman and Company
PAULOS, John Allen. 1988, 1990	Innumeracy. Mathematical Illiteracy and Its Consequences. London: Penguin Books
REILLY, Frank K.; BROWN, Keith C.. ⁶ 2000	Investment Analysis and Portfolio Management. Fort Worth: The Dryden Press
SIEGEL, Andrew F.. 1990, ⁴ 2000	Practical Business Statistics. Boston: Irwin McGraw-Hill
SPIEGEL, Murray R.. 1972	Schaums's Outline of Theory and Problems of Statistics. New York: McGraw-Hill, Inc.
SPIEGEL, Murray R.. 1975, 1980	Schaums's Outline of Theory and Problems of Probability and Statistics. New York: McGraw-Hill, Inc.
SPIEGEL, Murray R.. 1961, ² 1992	Theory and Problems of Statistics. Schaum's Outline Series. Adapted for SI Units by CONSTABLE, R. L.. London: McGraw-Hill Book Company
SPSS Trends 10.0. 1999	SPSS. SPSS Trends 10.0. Chicago, IL: SPSS Inc.
TOUTENBURG, Helge; FLIEGER, Andreas; KASTNER, Christian. 1995	Induktive Statistik für Betriebs- und Volkswirte. München: Prentice Hall
TREYER, Oscar A. G.. 1984	'Unsicherheit' im Management Accounting I/II/III; in Büro + Verkauf: März S. 9-12 / April S. 22f / Mai S. 18f, 1984
UPTON, Graham; COOK, Ian. 1996, ² 1997	Understanding Statistics. Reprinted (with corrections) 1997. Oxford: Oxford University Press



Angaben zum Autor

Oscar A. G. Treyer - Dr. oec. publ., CQRM, dipl. Handelslehrer

studierte Betriebswirtschaftslehre, Finanzwissenschaft und Volkswirtschaftslehre an der Universität Zürich und promovierte 1985 zum Doktor der Wirtschaftswissenschaft aufgrund der Dissertation 'Amerikanisches Financial Accounting (Theorien und Methoden)'.

Wirtschaftspraxis: Tätigkeiten bei der Realisierung von Management-Informationssystemen, Restrukturierungen und Finanzbeschaffungen als Abteilungsleiter Control/EDV eines Unternehmens der Baustoff-Branche, Geschäftsführer des Bereichs Finanz/Control einer schweizerischen Informatik-Gruppe, Gruppenbereichsleiter Gruppen-Controlling einer international, europaweit führenden Unternehmensgruppe der Sanitärtechnik, operativer Finanzchef und Mitglied der Gruppenleitung eines internationalen Casino-Unternehmens sowie selbständiger Berater.

Lehrtätigkeit: Lehrbeauftragter an der Universität Zürich, Dozent an der Kammerschule Zürich, Professor an der FHBB Fachhochschule beider Basel Nordwestschweiz, Dozent an der Schweizerischen Akademie für Wirtschaftsprüfung in Zürich, Kursleiter im CFA® Exam Preparation Course in Zug, Approved Tutor für das MBA-Programm der Edinburgh Business School (Harriot-Watt University), Referent im MAS Corporate Finance CFO der Fachhochschule Nordwestschweiz (Hochschule für Wirtschaft), Ständiger Dozent für Accounting an der Universität St. Gallen von 2004 bis 2020.

Publikationen: Diverse Fachartikel in der Schweiz und Deutschland auf dem Gebiet des Management und Financial Accounting sowie Business Forecasting. Lehrbücher: 'Business Forecasting' und 'Fallstudien und Theorie zum Management Accounting'.