

Mehrstufige stochastische Optimierung im Fixed-Income-Management: eine Studie für den amerikanischen Kapitalmarkt

Karl Frauendorfer, Rainer Eggers, Axel Jeromin

Universität St. Gallen, Institut für Unternehmensforschung, St. Gallen, Schweiz

1 Einleitung und Motivation

Der Markt für festverzinsliche Anlagen gilt als einer der grössten Finanzmärkte der Welt. Die Suche nach fundierten Anlagestrategien im Fixed-Income-Bereich stellt ein beständiges anspruchsvolles Aufgabenfeld für institutionelle Anleger dar. Bisherige Ansätze verfolgen dabei zumeist eine statische Vorgehensweise, wie Constant-Mix-Politiken oder die Nachbildung allgemein anerkannter Indizes. Dynamische Ansätze wie die der mehrstufigen stochastischen Optimierung haben dagegen bisher keine weite Verbreitung gefunden.

Stochastische Optimierungsmethoden wurden am Institut für Unternehmensforschung der Universität St. Gallen in den letzten Jahren zur Lösung praktischer Aufgabenstellungen in unterschiedlichen Bereichen des Asset-Liability-Managements eingesetzt. Motiviert durch bisher durchwegs gute Erfahrungen im schweizerischen Geld- und Kapitalmarkt wurde eine Case-Study für den US-Bond-Markt initiiert. In dieser Studie wurde untersucht, ob und in welchem Ausmass die Verwendung dynamischer stochastischer Verfahren eine Alternative darstellen können.

Banken, Versicherungen und Pensionskassen kommt es zu, ihnen anvertraute Gelder in möglichst effizienter Weise zu verwalten. Traditionell bewegen sie sich hierbei im Spannungsfeld der Rendite-Risiko-Optimierung. Risiken treten vor allem als Folge von Unsicherheiten über zukünftige Entwicklungen – beispielsweise der Zinsen oder des Cashflows – auf. Konkret handelt es sich dabei um Zinsänderungs-, Wiederaanlage- und Liquiditätsrisiken. Im Idealfall werden bei der Investitionsentscheidung sämtliche der o. a. Risiken und sonstigen Einflussfaktoren berücksichtigt. Die operative Umsetzbarkeit wird jedoch durch die beschränkt verfügbaren Informationen, Marktunvollkommenheiten und Kapazitätsbeschränkungen bestimmt. Die Annäherung an den Optimalzustand wird in der Praxis deshalb durch vereinfachte Verfahrensweisen probiert. Gebräuchlich sind Constant-Mix-Strategien oder die Nachbildung von Marktindizes, das sogenannte Index-Tracking.

Die Anwendung von Constant-Mix-Strategien beruht auf der Erwartung, durch eine konstante Diversifikation der jeweils verfügbaren Anlagesumme, eine in bezug

auf Rendite und Risiko weitgehend optimierte und damit gegenüber Markteinflüssen robuste Portfoliozusammenstellung zu erreichen. Die Ausgestaltung des Constant-Mix kann auf den subjektiven Vorstellungen des Investors beruhen oder exogen durch Bilanzpositionen vorgegeben sein. Dieses ist bspw. bei Pensionskassen der Fall, wo die Eigenschaften der Zielanlage durch die entsprechenden Verpflichtungen gegenüber den Versicherten definiert sind. In der Konsequenz resultiert hieraus eine Strategie, bei der die neu hinzukommenden Gelder jeweils gemäss eines festen Investitionsschematas in vorgegebene Laufzeiten investiert werden. Es findet keine Rebalancierung der bereits investierten Gelder statt und die Investitionen werden immer bis zum Verfall gehalten. Es handelt sich somit um eine Buy-and-Hold-Strategie, bei der die Transaktionskosten dementsprechend gering gehalten werden, indem nur standardisierte liquide Marktinstrumente Anwendung finden.

Eine ähnliche Intuition verbirgt sich hinter der Vorgehensweise des Index-Tracking. Es geht von der Annahme aus, dass das Rendite-Risiko-Verhalten eines breitgefächerten Marktindex' das erreichbare Optimum darstellt, welches über einen längeren Zeitraum erzielbar ist. Dementsprechend besteht die Zielsetzung in einer weitestgehenden Nachbildung dieses Index'. Ein perfektes Index-Tracking ist grundsätzlich nicht erreichbar, da jeder im Index berücksichtigte Titel mit derselben Gewichtung auch in das Unternehmensportfolio zu integrieren wäre. Das Index-Tracking bedingt, dass das gesamte Portfolio regelmässig zu aktualisieren ist. Je präziser eine Nachbildung erfolgt, desto stärker fallen hierbei Transaktionskosten ins Gewicht, wodurch sich die Renditeerwartung reduziert.

Bei beiden angeführten Investitionsstrategien erfolgt die Anlageentscheidung nach einem über die gesamte Laufzeit unveränderlichem Entscheidungsmuster. So wird entweder an einer konstanten Vermögensaufteilung festgehalten oder strikt gemäss der aktuellen Indexentwicklung rebalanciert. In diesem Sinne sind sie als Passivstrategien zu verstehen. Sie ignorieren dabei den mehrperiodischen Charakter des Entscheidungsproblems, weil sie nicht berücksichtigen, dass jede heutige Anlagestrategie in Zukunft korrigierbar ist und damit auf zukünftige Entwicklungen reagiert werden kann.

Mehrperiodische stochastische Optimierungsmodelle schränken ihre zukünftigen Handlungsmöglichkeiten weniger ein und nutzen zur Entscheidungsfindung eine breitere Informationsbasis, indem sie Rebalancierungen zulassen und mögliche Entwicklungen unsicherer Einflussgrössen in die Entscheidungsfindung einfließen lassen. Zu jedem Zeitpunkt erhält man eine konkrete Anlageempfehlung als Ergebnis einer individuellen Optimierung. Dadurch ergibt sich ein aktives Anlagemanagement.

2 Case-Study

2.1 Asset- und Liability-Management-Modell

Für die Fallstudie wurde ein stochastisches Optimierungsmodell (SOAL) zugrundegelegt, welches sich bereits bei der Optimierung von Refinanzierungs- und Spargeldanlageentscheidungen in der Praxis bewährt hat. Es berücksichtigt im mehrperiodigen Kontext Unsicherheiten bzgl. des Cashflows und der Zinsstruktur. Das Ziel besteht darin, den erwarteten Gegenwartswert der Differenz aller innerhalb des Planungshorizonts T anfallenden Zinserträge ($\varphi_t^{d,+} \cdot \nu_t^{d,+}$) und -kosten ($\varphi_t^{d,-} \cdot \nu_t^{d,-}$) zu maximieren, was einer Optimierung des Laufzeitenmanagement gleichkommt.

Die Zins- und Volumendynamiken werden als mehrdimensionale stochastische Prozesse modelliert. Die Stochastik der Zinskurve wird durch einen K -dimensionalen Prozess $(\eta_t; t \in [0, T])$ dargestellt. Die Beschreibung der Zinsdynamik erfolgt im Sinne eines Key-Rate-Modells (Ho, 1992). In der Fallstudie wurde die Zinskurve als ein dreidimensionaler Prozess abgebildet, in dem die $K = 3$ Key-Rates die Entwicklung des Zinssatzes einer kurzen, mittleren und längerer Laufzeit als korrelierte Brownsche Bewegungen in diskreter Zeit darstellen. Sämtliche Zinssätze für die dazwischen liegenden Laufzeiten werden interpoliert. Damit ist das Modell in der Lage, Shift-, Tilt- und Hump-Bewegungen in der Zinskurve anzunähern. Mit der funktionalen Beziehung von η_t und $\varphi_t^{d,+}, \varphi_t^{d,-}$ werden die Sensitivität der Zinssätze bzgl. der Änderungen in den Risikofaktoren, die Transaktionskosten, der Bid-Ask-Spread und der Diskontmechanismus berücksichtigt. Zusätzlich wird mit der Cashflow-Dynamik ein weiterer stochastischer Prozess integriert. Es wird unterstellt, dass auch die Volumenänderungen $\xi_t; t \in [0, T]$ einer Brownschen Bewegung folgen, normalverteilt sind und mit den Zinssätzen korreliert sind.

Im einzelnen gelten für das im Anschluss angeführte Modell nachfolgende Bezeichnungen:

$\mathcal{D} = \{1, 2, \dots, D\}$	Menge aller möglichen (Rest-) Laufzeiten
$\mathcal{D}^S \subset \mathcal{D}$	Menge aller handelbarer Laufzeiten
$t = \{0, \dots, T\}$	Periode (z. B. Monat)

Die Zustands- und Entscheidungsvariablen innerhalb des Modells lauten:

$v_t^{d,+}$	Anlagevolumen mit Laufzeit d zum Zeitpunkt $t, d \in \mathcal{D}^S$
$v_t^{d,-}$	Finanzierungsvolumen mit Laufzeit d zum Zeitpunkt $t, d \in \mathcal{D}^S$
v_t^d	gesamtes Anlagevolumen mit Laufzeit d zum Zeitpunkt $t, d \in \mathcal{D}^S$
x_t	gesamter Cashflow zum Zeitpunkt $t, d \in \mathcal{D}^S$
$l_t^{d,+}$	Anlagelimit im Zeitpunkt t für Laufzeit $d, d \in \mathcal{D}^S$
$l_t^{d,-}$	Finanzierungslimit im Zeitpunkt t für Laufzeit $d, d \in \mathcal{D}^S$

Bei den stochastischen Parametern handelt es sich um:

- $\varphi_t^{d,+}$ Diskontsatz (Habenzins) bei Laufzeit d Perioden zum Zeitpunkt t ,
 $d \in \mathcal{D}^S$
- $\varphi_t^{d,-}$ Diskontsatz (Sollzins) bei Laufzeit d Perioden zum Zeitpunkt t ,
 $d \in \mathcal{D}^S$
- ξ_t Volumenänderungen zum Zeitpunkt t

Das Optimierungsproblem hat dann folgendes Aussehen:

$$\begin{aligned}
& \max_{\Omega} \int \sum_{t=0}^T \sum_{d \in \mathcal{D}^S} \left(\varphi_t^{d,+} \cdot v_t^{d,+} - \varphi_t^{d,-} \cdot v_t^{d,-} \right) dP(\eta, \xi) \\
& \text{s.t.} \quad (1a) \quad v_t^d - v_{t-1}^{d+1} - v_t^{d,+} + v_t^{d,-} = 0 \quad \forall t = 0, 1, \dots, T; \forall d \in \mathcal{D}^S \\
& \quad (1b) \quad v_t^d - v_{t-1}^{d+1} = 0 \quad \forall t = 0, 1, \dots, T; \forall d \notin \mathcal{D}^S \\
& \quad (2) \quad x_t - \sum_{d \in \mathcal{D}} v_t^d = 0 \quad \forall t = 0, 1, \dots, T \\
& \quad (3) \quad x_t - x_{t-1} = \xi_t \quad \forall t = 1, 2, \dots, T \\
& \quad (4) \quad \sum_{d \in \mathcal{D}^S} v_t^{d,+} - \sum_{d=1}^M v_{t-1}^d \leq \xi_t \quad \forall t = 0, 1, \dots, T \\
& \quad (5a) \quad 0 \leq v_t^{d,+} \leq l_t^{d,+} \quad \forall t = 0, 1, \dots, T; \forall d \in \mathcal{D}^S \\
& \quad (5b) \quad 0 \leq v_t^{d,-} \leq l_t^{d,-} \quad \forall t = 0, 1, \dots, T; \forall d \in \mathcal{D}^S \\
& \quad (6a) \quad v_t^{d,-}, v_t^{d,+} \text{ nichtantizipativ} \quad \forall t = 0, 1, \dots, T; \forall d \in \mathcal{D}^S \\
& \quad (6b) \quad v_t^d, x_t \in \mathbb{R} \text{ nichtantizipativ} \quad \forall t = 0, 1, \dots, T; \forall d \in \mathcal{D}^S
\end{aligned}$$

Die Zielfunktion maximiert den erwarteten Gewinn für den gesamten Planungszeitraum über alle handelbaren Laufzeiten. Die Restriktion (1a) stellt sicher, dass das in d Perioden fällige Gesamtvolumen sich aus dem angelegten Volumen der Vorperiode $t - 1$ mit der Restlaufzeit $d + 1$ und den neu angelegten Mitteln abzüglich neu eingegangener Verbindlichkeiten mit der jeweiligen Laufzeit ergibt. Bei nicht handelbaren Laufzeiten entspricht das gesamte Volumen gem. (1b) demjenigen der Vorperiode mit Restlaufzeit $d + 1$. Nach (2) muss die Summe des Volumens über alle Fälligkeitstermine hinweg mit dem gesamten anzulegenden Volumen übereinstimmen. Die stochastischen Cashflow-Änderungen kommen in (3) zum Tragen. Das Volumen in t ergibt sich aus dem Volumen der Vorperiode $t - 1$ zuzüglich einer stochastischen Änderung ξ_t . Mittels des Parameters M in Restriktion (4) lassen sich die aufgenommenen und wiederangelegten Mittel begrenzen. Durch (5a) und (5b) können Liquiditätsrestriktionen in die Problemstellung eingeführt werden.

Dieses lineare Programm wird für eine Vielzahl möglicher Zins- und Volumenentwicklungen (Szenarien) aufgestellt und gelöst. Die Nichtantizipativitätsbedingungen (6a) und (6b) besagen, dass für zwei Szenarios, welche eine identische Vorgeschichte bis zum Zeitpunkt t besitzen, die Entscheidungs- und Zustandsvariablen ebenfalls identisch sein müssen.

Es ist ersichtlich, dass der Risikofaktor η_t ausschliesslich in der Zielfunktion auftaucht, während das ξ_t nur die rechte Seite der Nebenbedingungen beeinflusst. Insbesondere sind alle Koeffizienten der linken Seite deterministisch. Dieses stellt zusammen mit der Wahrscheinlichkeitsverteilung der Risikofaktoren sicher, dass die Wertefunktion eine konkav-konvexe Sattelstruktur in (η_t, ξ_t) besitzt. Diese besondere Struktur ermöglicht die Anwendung eines speziellen Lösungsverfahrens, der Baryzentrischen Approximation. Diese erlaubt über eine geeignete Diskretisierung des Wahrscheinlichkeitsraumes Ω die Bestimmung einer effizienten Lösung.

2.2 Aufbau und Ergebnisse

Die im nachfolgenden beschriebene Fallstudie diente dem Vergleich alternativer Investitionsstrategien. Bei diesen handelt es sich zum einen um das oben beschriebene sogenannte Index-Tracking, welches hier anhand zweier allgemein anerkannter breitgefächerter Bondmarktindizes erfolgte. Beide Indizes werden von einer etablierten amerikanischen Investmentbank regelmässig herausgegeben und erfreuen sich im Rahmen von Performancevergleichen grosser Beliebtheit. Das Index-Tracking wurde zum anderen mit einer Investitionsstrategie verglichen, welche mit Hilfe des im vorhergehenden Kapitels beschriebenen Optimierungsmodells bestimmt wurde.

Bei den Indizes handelt es sich um einen Treasury-Index (TI) und einen Aggregate-Index (AGI). Beide Indizes sind Total-Return-Indizes, in denen die Wertentwicklung unkündbarer Anleihen US-amerikanischer Emittenten repräsentativ abgebildet wird. Die Laufzeiten der enthaltenen Bonds betragen mindestens ein, höchstens aber dreissig Jahre. Die Aufnahme einer Anleihe in den Index setzt eine Mindestkapitalisierung von 100 Mio US\$, sowie eine Mindestbonität des Schuldners voraus. Während der TI nur Staatsanleihen berücksichtigt, finden sich im AGI auch erstklassige Unternehmensanleihen mit einem Rating von Baa3 (Moody's), bzw. BB+ (S & P) oder besser wieder.

Zur Ermittlung der Investitionsstrategie mittels des Optimierungsmodells wurden Zinssätze von Treasury-Bonds verwendet, deren maximale Laufzeit im Gegensatz zu den oben genannten Bondindizes jedoch nur zehn Jahre betrug. Somit entsprechen sich diese Strategie und der TI hinsichtlich ihrer Risikoklasse, während der AGI ein etwas höheres Risiko besitzt und deshalb tendenziell eine leicht höhere Rendite erwarten lässt.

Der Vergleichszeitraum betrug 21 Jahre (Jan. 78 bis Dez. 98). Für die Vergleichsstrategie wurden auf vierteljährlicher Basis Investitionsentscheide getroffen, die sich aus den Optimierungen ergaben. Hierfür ging man von einem über die gesamte Laufzeit hinweg konstanten Cash-Inflow von 100 Mio US\$ je Quartal aus. Die Zinsverrechnung erfolgte jährlich.

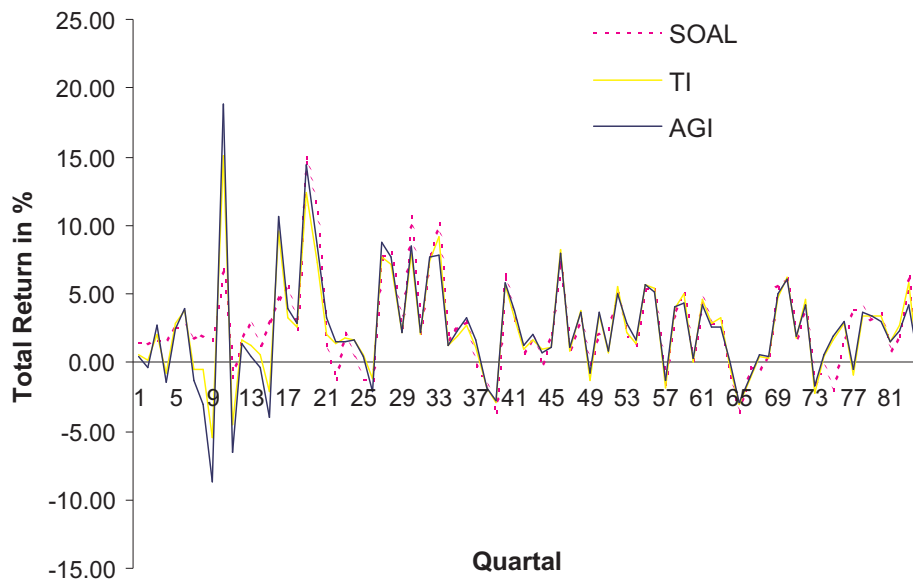


Abbildung 1: Quartalsweise Total Returns

Es wurden verschiedene Kennziffern zugrundegelegt, um Aussagen bezüglich der Performance aller drei betrachteten Strategien treffen zu können. Das bedingte die vierteljährliche Bestimmung der Marktwerte der Portfolios, wie sie mit den unterschiedlichen Strategien erreicht worden wären. Hieraus liessen sich dann entsprechende Total-Return-Kennziffern für beliebige Zeitpunkte und -spannen im Analysezeitraum bestimmen. Zusätzlich wurde die Qualität der Strategien am Studienende (Dez. 98) durch den Vergleich der Marktwerte bestimmt und Renditekennziffern errechnet. Die Berechnung alternativer Risikomasse ergänzte die o. a. Performanceanalyse.

In Abbildung 1 sind die quartalsweisen Total-Return-Verläufe der drei untersuchten Investitionsstrategien abgetragen. Die Volatilität der Total Returns wird durch die tatsächliche Zinsentwicklung bestimmt. Es zeigt sich, dass die Entwicklungen aller Strategien hoch miteinander korreliert sind. Dieses weist darauf hin, dass die aus den unterschiedlichen Strategien resultierenden Portfolios ähnliche Eigenschaften aufweisen.

Die Bewertung der Strategien erfordert die Bestimmung weiterer Ertrags- und Risikokennziffern. In Abbildung 2 ist deshalb aus den Total Returns eine Indexentwicklung abgeleitet worden. Dieser Index besass für alle Strategien zu Beginn der Studie den Wert 1. Am Studienende lag er für das stochastische Modell bei

8,4. Der AGI erreichte 7,1 und lag damit knapp unterhalb des TI, dessen Wert 7,2 betrug. Es ist hierbei zu betonen, dass ein höherer Indexstand noch keine hinreichende Aussage über die tatsächliche Qualität der Investitionsstrategie zulässt. Hierzu ist eine Betrachtung der tatsächlich erzielten Marktwerte und Renditen unabdingbar. Als Beispiel mag hierfür der Vergleich zwischen dem AGI und dem TI dienen. Der Marktwert des AGI lag trotz eines geringeren Indexwertes zum Schluss mit 27,7 Mrd US\$ um 2,6% *über* dem des TI.

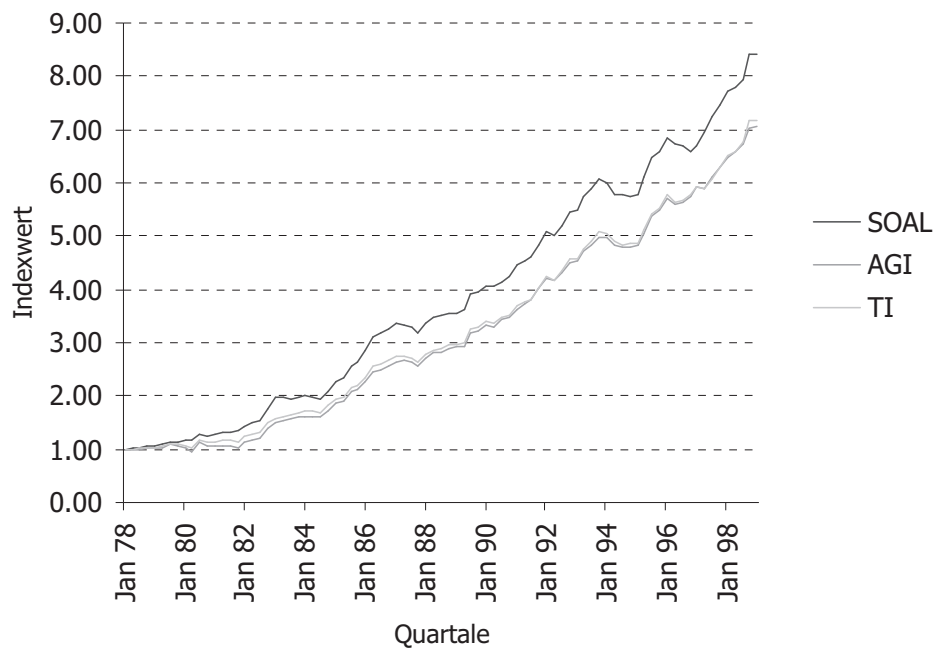


Abbildung 2: Indexverläufe alternativer Strategien

Die Risiko- und Ertragskennzahlen lassen sich für die alternativen Anlagekonzepte in Abbildung 3 ablesen. In der durchgeführten Untersuchung konnten bei diesen mittels des stochastischen Entscheidungsmodells leichte Vorteile erzielt werden.

	SOAL	AGI	TI
Marktwert in Mrd US\$	28,3	27,7	27,0
Rendite	10,33%	10,15%	9,96%
Varianz der Total Returns	10,5	15,7	12,0
Duration in Jahren	4,09	4,44	5,58

Abbildung 3: Rendite-Risiko-Kennziffern am Studienende

3 Zusammenfassung und Fazit

Ein geeignetes mehrstufiges stochastisches Optimierungsmodell nutzt die speziellen Eigenschaften des Entscheidungsproblems im Fixed-Income-Management aus. Zur Bestimmung einer Anlagestrategie bildet das Entscheidungsmodell die Unsicherheiten in den grundlegenden Einflussfaktoren als stochastische Prozesse ab. Nach der geeigneten Diskretisierung des Entscheidungsraumes wird das Problem mit Hilfe der linearen Optimierung gelöst.

Die aus dem vorgestellten Optimierungsmodell resultierenden Anlagestrategien zeichnen sich durch eine einfache Umsetzbarkeit aus. Die Anzahl von Rebalancierungen wird gering gehalten, so dass Renditeverluste durch Transaktionskosten niedrig ausfallen. Im langjährigen Vergleich zu den beiden betrachteten Indizes wies die Strategie eine gute Risiko-Rendite-Allokation auf.

Diese könnte unter Umständen darauf zurückzuführen sein, dass Index-Tracking zu einem statischen Anlageverhalten führt und ausserdem einen Teil der am Markt vorhandenen Informationen vernachlässigt. Ob mittels stochastischer Optimierung generell und dauerhaft ähnliche Resultate erreicht werden können, sollte Inhalt weiterer Untersuchungen sein.

Literatur

- [1] Birge, J. R. / F. Louveaux (1997): *Stochastic Programming*. Springer: New York, 1997.
- [2] Cariño, D. R. / T. Kent / D. H. Myers / C. Stacey / M. Sylvanus / A. L. Turner / K. Watanabe / W. T. Ziemba (1994): "The Russell-Yasuda Kasai Model: An Asset Liability Model for Japanese Insurance Company Using Multi-stage Stochastic Programming," *Interfaces* (24,1) 1994, 29–49.

- [3] Cariño, D. R. / W. T. Ziemba (1998): "Formulation of the Russell-Yasuda Kasai Financial Planning Model," *Operations Research* (46) 1998, 433–449.
- [4] Fabozzi, F. J. (ed.)(1997): *Handbook of fixed income securities*. 5th ed., McGraw-Hill: New York, 1997.
- [5] Forrest, B. / K. Frauendorfer / M. Schürle (1997): "A Stochastic Optimization Model for the Investment of Savings Account Deposits," in: Kischka, P. / H. W. Lorenz et al., *Operations Research Proceedings 1997*. Springer: Berlin, Heidelberg, New York, 1997, 382–387.
- [6] Frauendorfer, K. (1992): *Stochastic Two-Stage Programming*. Springer: Berlin, Heidelberg, New York, 1992.
- [7] Frauendorfer, K. (1996): "Barycentric scenario trees in convex multistage stochastic programming," *Mathematical Programming* (75) 1996, 277–293.
- [8] Ho, T. (1992): "Key Rate Durations: Measures of Interest Rate Risks," *Journal of Fixed Income* (2) 1992, 29–44.
- [9] Kall, P. / S. W. Wallace (1994): *Stochastic Programming*. Wiley: Chichester, 1994.
- [10] Marohn, C. (1998): *Mehrstufige stochastische lineare Optimierung im Asset und Liability-Management*. Diss. Universität St. Gallen, in: E. Kilgus et al. (eds.): *Bank- und Finanzwirtschaftliche Forschungen*. Haupt: Bern, Stuttgart, Wien, 1998.
- [11] Schürle, M. (1998): *Zinsmodelle in der stochastischen Optimierung*. Diss. Universität St. Gallen, in: E. Kilgus et al. (eds.): *Bank- und Finanzwirtschaftliche Forschungen*. Haupt: Bern, Stuttgart, Wien, 1998.
- [12] Zenios, S. A. / R. L. D'Ecclesia (1994): *Operations Research Models in Quantitative Finance*. Physica, Heidelberg, 1994.
- [13] Ziemba, W. T. / J. M. Mulvey (1998): *Worldwide Asset and Liability Modeling*. Cambridge University Press, 1998.