

Fallstudie:

MEHRSTUFIGE
ERWARTUNGSWERT-VARIANZ-ANALYSE *

Karl Frauendorfer, Heiko Siede
Institut für Unternehmensforschung (Operations Research)
Bereich Stochastische Optimierung
Holzstr. 15
9010 St. Gallen

März 1998

*Forschungsaktivitäten wurden unterstützt vom *Grundlagenforschungsfonds der Universität St. Gallen*, Nr.: S-624

1 Einleitung

Als Ziele eines Anlagekonzeptes sind vor allem Sicherheit, optimale Rendite, Risikostreuung, Substanzerhaltung und Wachstum zu nennen. Bei der Umsetzung bzw. bei der Bestimmung eines Benchmarkportfolios wird häufig auf den einperiodischen Erwartungswert-Varianz von Markowitz zurückgegriffen, d. h. es wird mittels der Varianz das Marktrisiko zu einer vorgegebenen erwarteten Rendite bestimmt. Auf diese Weise erhält man eine Menge effizienter Rendite-Marktrisiko Kombinationen, die *Efficient frontier*. Von diesen wird nun jenes ausgewählt, welches die Verbindlichkeiten, die der Aktivseite gegenüberstehen, mit möglichst hohem Sicherheitsgrad abdecken und darüberhinaus eine hohe Rendite erzielt. Diese zwei primären Ziele stehen dabei im Widerspruch zueinander und müssen unter Berücksichtigung von internen und behördlichen Anlagevorschriften eher subjektiv evaluiert werden. In der Kapitalmarkttheorie werden diese individuellen Entscheidungen mit Hilfe von Nutzenfunktionen durchgeführt.

Die Anwendung dieses Ansatzes erfordert eine kritische Betrachtung. Es lässt sich grundsätzlich über die Qualität eines einperiodischen Markowitzansatzes streiten. Insbesondere hängen die hierdurch erzielten Ergebnisse wesentlich von der Güte der geschätzten Erwartungswerte und Varianz-Kovarianz-Matrizen der zugrunde liegenden Anlagen bzw. Indizes ab, die sich in diesem Modell während des gesamten Planungshorizontes nicht verändern können. Die Praxis hat jedoch gezeigt, dass die Inputdaten sich über die Zeit verändern und somit eine Neuorientierung und eine damit verbundene Rebalancierung des Portfolios während des laufenden Planungshorizontes erforderlich wird.

Dieser Bericht verfolgt folgende Ziele:

- Beschreibung einer alternativen Methodik (mehrstufige Erwartungswert-Varianz Analyse).
- Untersuchung der Auswirkungen von sich im Zeitablauf verändernder Varianz-Kovarianz-Matrizen auf die Portfoliooptimierung anhand einer Fallstudie.

2 Alternative Methodik

Der prinzipielle Ansatz von Markowitz als Erwartungswert-Varianz Modell kann von einem einperiodischen Optimierungsmodell zu einer mehrperiodischen Variante erweitert werden. Die Renditen und die Varianz-Kovarianz-Matrix werden als diskrete stochastische Prozesse modelliert. Dies führt dazu, dass man für einen vordefinierten Zeitraum adäquate Modelle für die Preisprozesse der Anlagen und des Varianz-Kovarianz-Prozesses festlegt und deren Parameter schätzt

statt Rendite- und Kovarianzprognosen zu erstellen. Dabei ist darauf zu achten, dass die Varianz-Kovarianz-Matrix stets mit der Verteilung der Rendite zwischen den entsprechenden Zeitpunkten korrespondiert.

Klassischerweise werden Preisprozesse von Anlagen mit Hilfe einer Diffusion modelliert, welche z.B. auch beim Black-Scholes-Modell in der Optionspreistheorie unterstellt werden. Dies führt zu der Verwendung von logarithmisch normalverteilten Renditen zwischen zwei Zeitpunkten, deren Diskretisierungen einen Szenariobaum erzeugen, welcher als Input für das noch zu beschreibende Optimierungsproblem dient bzw. die analytischen Voraussetzungen für die Verwendung der bestehenden Optimierungstheorie darlegt. Darüberhinaus ergibt sich die entsprechende Varianz-Kovarianz-Matrix kanonisch aus dieser Verteilung und braucht nicht separat modelliert zu werden. Setzt man den Drift und die Volatilität als im Zeitablauf konstant voraus, so ist dies aus Sicht der Parameterschätzung sehr vereinfachend und zweckmässig, aber es ist auch eine starke Einschränkung, da somit während des Zeithorizontes die Varianz-Kovarianz-Matrix konstant bleibt. Die Möglichkeiten eines mehrperiodischen Ansatzes werden bei diesem Vorgehen nicht voll ausgeschöpft.

In den letzten Jahren sind für die Modellierung von Preisprozessen vermehrt Zeitreihen verwendet worden, die eine Veränderung der Varianzen explizit beschreiben. Dazu gehören insbesondere *Generalized autoregressive conditional heteroscedasticity* (GARCH), *Stochastic volatility* Modelle und deren multidimensionalen Erweiterungen. Diese Zeitreihen bieten sich für den mehrstufigen Erwartungswert-Varianz Kontext an, da die periodischen Verteilungen der Renditen durch unterschiedliche Varianz-Kovarianz-Matrizen bestimmt sind, die zu Beginn der Periode bekannt sind, und sich somit einfach im Optimierungsmodell integrieren lassen.

Eine Portfolioallokation wird in zwei Segmente unterteilt. Zum einen sind das risikobehaftete, d. h. volatile, Anlagen¹ und zum anderen eine risikolose Anlage². Die Volatilität eines Portfolios wird ausschliesslich durch die risikobehafteten Anlagen im gewählten Portfolio verursacht. Allerdings kann die minimale Varianz als Zielsetzung nicht mehr aufrecht erhalten werden, da im mehrperiodischen Fall die Varianz-Kovarianz-Matrix sich fortlaufend entwickelt³ und sich das optimale Portfolio in den verschiedenen Szenarios stark unterscheidet. Stattdessen ist aber die Betrachtung einer minimalen *erwarteten Varianz* möglich, was als Ziel der Optimierung benutzt wird.

Neben den klassischen Nebenbedingungen einer Verwendung der aktuellen Anfangsallokation des Vermögens und einer erwarteten Gesamtrendite am Ende des

¹Aktienmarkt, Kapitalmarkt

²3-monatige Anlagen auf dem Geldmarkt, deren Rendite sich aufgrund der Laufzeit der Anlage durch eine niedrige Volatilität auszeichnet. Daher kann diese als risikolos betrachtet werden

³Betrachte z. B. die Fallstudie für die empirische Relevanz

Planungshorizontes kommt noch ein weiterer Typ von Restriktionen zum Optimierungsproblem hinzu. Dieser beschreibt die Entwicklung des Vermögens im Zeitablauf und ermöglicht die Rebalancierung des Portfolios zu den vorgegebenen Zeitpunkten. Dabei werden die Rebalancierungen mit variablen Transaktionskosten bedacht, die von der Cash Position, bzw. vom Vermögen, abgezogen werden. Zusammenfassend verfolgt die mehrperiodische Erwartungswert-Varianz Analyse die Ziele:

- Bestimmung der optimalen Rebalancierungspolitik, bzw. Evaluierung des optimalen Portfolios aus aktueller Sicht und für zukünftige Perioden in Abhängigkeit von der Entwicklung der Risikofaktoren.
- Die mehrperiodische Optimierung findet unter Berücksichtigung der möglichen zukünftigen Marktsituationen statt, und ist daher einem einperiodischen Modell überlegen.
- Für jede vorgegebene Rendite erhält man eine minimale Volatilität und das dazu entsprechende Portfolio aus einer risikolosen und risikobehafteten Anlagen.
- Die individuelle optimale Rendite-Volatilität Kombination wird wie im klassischen Markowitzansatz mit Hilfe von nutzentheoretischen Ansätzen ermittelt. Im Bankenbereich sind vor allem die Deckung der Verbindlichkeiten von entscheidender Bedeutung. So könnte man hier auch jene erwartete Rendite verwenden, welche zu einer Vermögensentwicklung korrespondiert, die über dem Kapitaldeckungsbeitrag zu einem vordefinierten Wahrscheinlichkeitsniveau liegt.
- Ist eine Periode beendet und die Entwicklung der Risikofaktoren beobachtet worden, so wird mit den aktuellen Marktdaten neu optimiert⁴.

In der mehrperiodischen Erwartungswert-Varianz-Analyse lässt sich leicht eine Risikoanalyse integrieren, falls die Entwicklung der Verbindlichkeiten via Prognosen geschieht. Berechnet man die Efficient frontier in diesem mehrperiodischen Fall, so wird bei vorgegebener erwarteter Gesamrendite für jeden Knoten im Szenariobaum ein optimales Portfolio berechnet. Dieses bestimmt den Wert der Kapitalanlagen. Ausserdem sind die Eintrittswahrscheinlichkeiten der Szenarios bekannt, und damit können die Ausfallwahrscheinlichkeiten für alle zukünftigen Zeitpunkte berechnet werden. Dieses Vorgehen geschieht für jede erwartete Rendite der Efficient frontier und man kann jene Rendite-Marktrisiko Kombinationen wählen, welches die gesetzten Kriterien erfüllt, z. B. höchstens 5% Ausfallwahrscheinlichkeit zu allen Zeitpunkten oder eine zeitliche Staffelung. Somit können die Kriterien flexibel gesetzt werden.

⁴Rollende Optimierung

Der Szenariobaum wird durch Parameter wie z. B. Drifts der Renditen bestimmt. Solche Markttendenzen sind jedoch nicht sicher vorhersehbar. Daher kann man durch Verwendung verschiedener möglicher Markttendenzen eine Serie von Szenariobäumen/Efficient frontiers bestimmen, die nach den gesetzten Kriterien auf ihren Kapitaldeckungsgrad untersucht werden. Durch Festsetzen einer heutigen Entscheidung kann bestimmt werden, welche Risiken (Volatilität, Ausfallwahrscheinlichkeit) bei unterschiedlicher Markttendenz (verschiedener Szenariobaum) eingegangen werden. Ein Portfolio erachtet man dann als effizient, welches für alle Markttendenzen (Szenariobäume) die angestrebten Kriterien erfüllt.

3 Fallstudie

Für die Beurteilung dieses Ansatzes ist insbesondere eine theoretische Untersuchung, bzw. Performancemessung mit realistischen Marktdaten notwendig. Hierbei ist die Schätzung der Parameter der zu Grunde liegenden Preisprozesse entscheidend, die somit wesentlicher Bestandteil einer Studie sind. In der folgenden Fallstudie sind historische Daten des entsprechenden Zeitraums herangezogen worden um die Inputdaten zu schätzen.

Da die Implementation des im vorherigen Abschnitts beschriebenen Modells noch nicht abgeschlossen ist, sind auf verschiedene Bestandteile verzichtet worden. Dazu gehören die Vernachlässigung von Transaktionskosten und einer risikolosen Anlage im Optimierungsprozess. Desweiteren ist die Zielfunktion aus analytischen Gründen insofern vereinfacht worden, dass die Volatilität des Vermögens als Zielfunktion herangezogen worden ist⁵. Ausserdem wurde auf die Generierung eines Szenariobaums und einer rollenden Planung verzichtet, da die entsprechenden Daten aus der ex post Situation heraus bekannt sind. Somit wurde mit ausschliesslich einem Pfad gearbeitet, d. h. ein deterministisches Problem untersucht.

Die wichtigsten Fragestellungen der Fallstudie sind

- Wie gross ist der Einfluss einer mehrperiodischen Optimierung im Vergleich
 - zu einer einperiodischen Optimierung und
 - zu einer sequentiellen Optimierung von einperiodischen Erwartungswert-Varianz Ansätzen im Sinne von Markowitz und
- wie lässt sich die Reduzierung der Varianz erklären.

⁵Die Verwendung der Volatilität der Rendite bewirkt, dass der Zielfunktionswert zwar weiterhin konvex, aber nicht mehr quadratisch ist, und somit ein aufwendigerer Lösungsalgorithmus verwendet werden muss.

Ausgangspunkt dieser Fallstudie sind die tägliche Aktien- und Bondindizes aus der Schweiz, Deutschland, Japan und den USA, d. h. es werden der Dax, Dow Jones Index, NIKKEI, und der SPI verwendet und für den Kapitalmarkt wird der 5 Jahres EFFAS Index⁶, Total return der entsprechenden Ländern benutzt. Der Zeitraum dieser Studie beträgt zwei Jahre vom 1. Jan. 1996 bis 31. Dez. 1997, wobei diese für die Optimierung in Quartale aufgeteilt sind.

Aus Sicht eines Schweizer Portfoliomanagers sind die Investitionen in anderen Ländern mit Wechselkursrisiken behaftet. Da diese gehedged werden können, sind auch Tests mit den unbereinigten Daten durchgeführt worden. Die Ergebnisse ergaben jedoch keine wesentlichen Unterschiede zu den wechselkursbereinigten Daten und sind daher hier nicht dokumentiert worden.

In dieser Präsentation der Fallstudie ist somit die Möglichkeit des hedges ausgeschlossen worden, so dass alle Zeitreihen bzgl. des Wechselkurses bereinigt wurden. Als Folge trat eine erhöhte Volatilität bei den nichtschweizer Kapitalmarktanlagen auf, wohingegen die Aktienindizes nicht an Volatilität zunahmen. In Abbildung 1 ist die Entwicklung der Total returns über den vorgegebenen Zeitraum dargestellt.

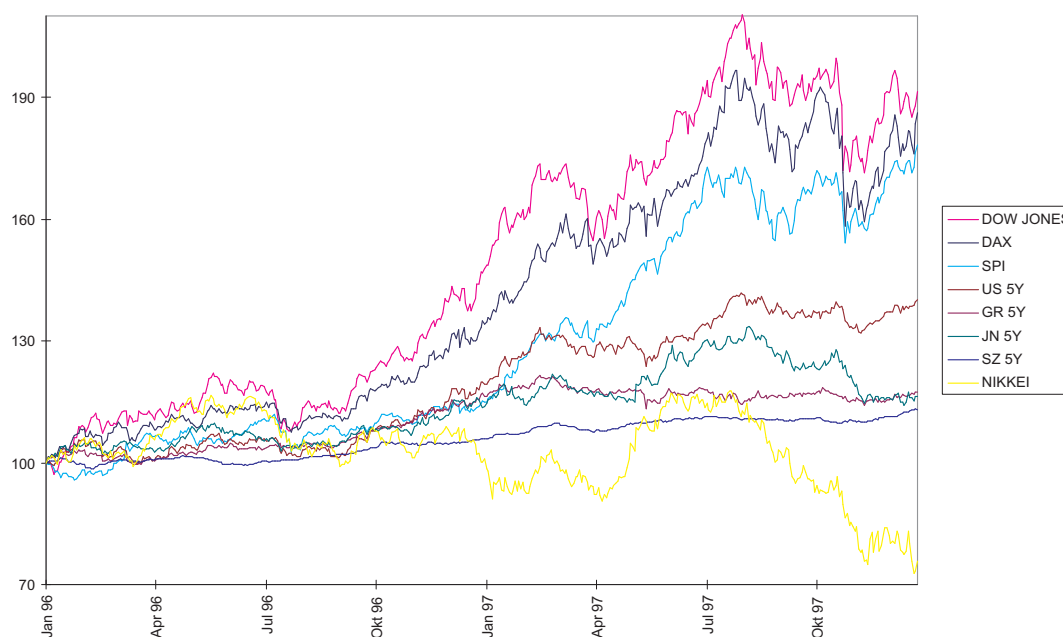


Abbildung 1: Entwicklung der Indizes vom 1. Jan. 1996 bis 31. Dez. 1997

⁶European Federation of Financial Analyst Service Bond Index, Bezugsquelle: Bloomberg

3.1 Parameterschätzungen

Grundannahme der durchgeführten Schätzungen ist, dass die Indizes einem Diffusionsprozess folgen und somit die stetigen Renditen⁷ normalverteilt sind. Ein Quartal besteht aus einer festen Anzahl von Handelstagen, mit denen man die Varianz-Kovarianz-Matrix der täglichen stetigen Renditen dieses Quartals schätzt. Multipliziert man diese Matrix mit der Anzahl der Handelstage erhält man die Varianz-Kovarianz-Matrix der quartalen stetigen Rendite dieses Quartals. Analoges kann für die Schätzung der zweijährigen Varianz-Kovarianz-Matrix mit entsprechender Anzahl von Handelstage durchgeführt werden.

Die erzielten Renditen der Indizes können als Realisation der Verteilung interpretiert werden, die eine wie oben geschätzte Varianz-Kovarianz-Matrix haben⁸. Somit fehlt noch die Bestimmung der erwarteten Rendite, bzw. des Drifts, falls man die zeitliche Kopplung der Verteilung als stochastischen Prozess interpretiert. Es wird angenommen, dass der Drift einer stetigen Rendite aus der Summe der stetigen Rendite 0.08 einer risikolosen Anlage und einer Risikoprämie besteht. Die Risikoprämie für einen Index ist das Produkt aus der Standardabweichung der stetigen Rendite dieses Indexes und dem Faktor 1.2044⁹, der für alle Indizes gleich ist und aus den historisch erzielten Daten berechnet wird¹⁰. Die geschätzten Inputdaten für den Zweijahreszeitraum sind veranschaulicht in Tabelle 1 zusammengefasst.

Input	Aktienmarkt				Gvt 5y Total Return			
	DAX	DJI	Nikkei	SPI	Gr	US	Jn	Sz
Volatilität	0.278	0.284	0.353	0.201	0.101	0.150	0.154	0.033
realisierte Rendite	0.621	0.649	-0.277	0.578	0.160	0.337	0.152	0.122
Risikoprämie	0.335	0.342	0.425	0.242	0.122	0.181	0.185	0.040
erw. st. Rendite	0.415	0.422	0.505	0.322	0.202	0.261	0.265	0.120
erw. Rendite	51.4%	52.5%	65.8%	38.1%	22.3%	29.8%	30.3%	12.7%

Tabelle 1: Geschätzte Volatilitäten und erwartete Renditen der Indizes vom 1. Jan. 1996 bis 31. Dez. 1997

⁷Die stetige Rendite wird aus der Differenz von aufeinanderfolgender logarithmierter Preise ermittelt.

⁸Die Annahme der Normalverteilung bleibt bestehen

⁹Arithmetisches Mittel aus $\frac{\text{erw. st. Rendite} - 0.08}{\text{Volatilität}}$ aller Indizes

¹⁰Um dem CAPM zu folgen, müsste man Betas zu Weltindizes berechnen. Dies ist hier unterlassen worden, da es am Ziel der Fallstudie vorbeigehen würde

3.2 Testergebnisse

Erwartungswert-Varianz Ansätze beruhen immer auf einer Menge von effizienten Portfolios, die zu einer Rendite-Volatilität Kombination korrespondieren. Um die Ansätze hier zu vergleichen, wird eine Rendite für den gesamten Zeithorizont vorgegeben und untersucht, welche Auswirkungen dies auf die Volatilität hat. Man kann dies für beliebig viele Renditen verfolgen. Hier wurde jedoch nur eine bestimmte repräsentative Rendite untersucht: die Marktrendite des ein- und mehrstufigen Ansatzes, die sich wie folgt berechnen lässt.

Mit den aus der Parameterschätzung erzielten Inputdaten wird die *Efficient frontier* erzeugt, die die Menge aller effizienten Rendite-Volatilität Kombinationen angibt. Setzt man einen risikolosen stetigen Zinssatz von 0.08 voraus, so berechnet sich die Kapitalmarktklinie durch Anlegen einer Tangente an die Efficient frontier durch den Punkt (0.08,0), der der Rendite-Volatilität Kombination der risikolosen Anlage entspricht. Der Berührungspunkt ist das Marktportfolio, dessen Zusammensetzung in der klassischen Portfoliotheorie von dem repräsentativen Marktteilnehmer gehalten wird.

Mit den Inputdaten aus Tabelle 1 lässt sich die optimale Portfolioallokation des einperiodischen Markowitz-Ansatzes bestimmen. Als stetige Marktrendite erhält man 0.192 ($\cong 21.1\%$) und eine Volatilität von 0.047. Das korrespondierende Portfolio ist in Tabelle 2 dargestellt. Ein Vergleich mit einem mehrperiodischen An-

Periode	Aktienmarkt				Gvt 5y Total Return			
	DAX	DJI	Nikkei	SPI	Ger	US	Jn	Sz
2 Jahre	0.0%	3.4%	5.8%	5.4%	10.2%	0.0%	3.4%	71.9%
st. Marktrendite			0.192					
Volatilität			0.047					

Tabelle 2: Marktportfolio des klassischen Markowitz-Ansatzes

satz ist jedoch nur erlaubt, wenn die Gesamtrendite über den Planungshorizont gleich ist.

Als Vergleichsgrundlage ist die Marktrendite des mehrstufigen Ansatzes gewählt worden. Aus dieser erhält man Portfolios, bzw. Rebalancierungsstrategien in den drei verschiedenen Ansätzen

- mehrperiodische Erwartungswert-Varianz-Ansatz (eine mehrperiodische Optimierung),
- einperiodischer Ansatz nach Markowitz (Zweijahresoptimierung) und
- einer Folge von einperiodischen Ansätzen (acht sequentielle Optimierungen, die quartalsweise durchgeführt werden).

Dabei wurde angenommen, dass in der quartalsweisen Anwendung des klassischen Markowitzansatzes die erwartete Rendite in jeder Periode gleich gross ist, und somit sich die Rendite, die mit dem mehrstufigen Ansatz erzielt wird, gleichmässig entwickelt.

Im mehrperiodischen Erwartungswert-Varianz-Ansatz beträgt die stetige Marktrendite 0.239 ($\cong 27\%$) mit einer Volatilität von 0.059. Die entsprechenden quartalen Portfolioallokationen sind in Tabelle 3 angegeben, woraus die Rebalancierungsstrategien evaluiert werden können.

Periode	Aktienmarkt				Gvt 5y Total Return			
	DAX	DJI	Nikkei	SPI	Ger	US	Jn	Sz
1. Quartal	2.6%	9.9%	17.5%	24.6%	0.0%	0.0%	14.2%	31.2%
2. Quartal	23.4%	7.9%	18.9%	24.0%	0.0%	0.0%	2.8%	23.0%
3. Quartal	11.9%	0.8%	5.3%	3.7%	9.9%	0.0%	6.5%	61.9%
4. Quartal	0.0%	0.5%	12.7%	24.5%	15.0%	0.0%	4.3%	43.0%
5. Quartal	1.9%	3.4%	3.7%	18.2%	7.5%	0.0%	10.0%	55.2%
6. Quartal	0.0%	0.0%	6.2%	6.5%	0.0%	6.2%	5.0%	76.1%
7. Quartal	0.0%	4.6%	6.9%	0.9%	20.2%	3.8%	0.0%	63.6%
8. Quartal	0.0%	0.0%	2.4%	2.6%	13.1%	9.5%	0.0%	72.2%
st. Markttrendite			0.239					
Volatilität			0.059					

Tabelle 3: Dynamische Portfolioallokation im mehrperiodischen Erwartungswert-Varianz-Ansatz

Auffallend an der Portfolioentwicklung ist, dass mit fortschreitender Zeit die risikobehafteten Anlagen gescheut werden und in dem niedrig volatilen Schweizer Kapitalmarkt verstärkt investiert wird. Dies ist eine Konsequenz der Zielfunktion, die nicht die Volatilität der Rendite, sondern die Volatilität des Vermögens minimiert. Da zu Beginn das Vermögen in der Regel klein ist, ist die Volatilität des Vermögens im Verhältnis zu einer späteren Periode mit einem verhältnismässig hohem Vermögen gering. Daher nimmt die Rendite tendenziell im Laufe der Zeit ab, was durch den Investitionsschritt in den Kapitalmarkt erreicht wird.

Für den einperiodischen Markowitzansatz betrachtet man den Punkt auf der Efficient frontier, der die Vergleichsrendite von 0.239 enthält. Deren Volatilität beträgt 0.067, und das entsprechende Portfolio ist in Tabelle 4 zusammengefasst. Durch die Vernachlässigung quartaler Rebalancierungsaktivitäten ist im Vergleich zum mehrperiodischen Ansatz die Volatilität gestiegen (von 0.059 auf 0.067). Dabei ist zu bemerken, dass im einperiodischen Fall eine zweijahres Varianz-Kovarianz-Matrix und im mehrperiodischen Fall acht Varianz-Kovarianz-Matrizen benutzt wurden¹¹ und so könnten aus Schätzfehlern Ungenauigkeiten

¹¹Die aber aus denselben Datensatz evaluiert werden, siehe Parameterschätzung

Periode	Aktienmarkt				Gvt 5y Total Return			
	DAX	DJI	Nikkei	SPI	Ger	US	Jn	Sz
2 Jahre	0.0%	7.0%	9.6%	9.2%	15.1%	0.0%	4.2%	55.0%
st. Vergleichsrendite			0.239					
Volatilität			0.067					

Tabelle 4: Optimales Portfolio im Markowitzansatz zu einer stetigen Vergleichsrendite von 0.239

entstehen.

Aus der ex post Sicht sind quartalsweise Varianz-Kovarianz-Matrizen bekannt, womit sich eine Folge von klassischen einperiodischen Ansätzen durchführen lässt. Um die stetige Vergleichsrendite 0.239 zu erreichen wurde dabei angenommen, dass in jeder Periode die stetige Rendite $1/8$ der Vergleichsrendite ist, so dass am Ende des Planungshorizontes wieder eine stetige Gesamtrendite von 0.239 entsteht. Dieses Vorgehen umgeht somit die Schätzproblematik, da die gleichen Inputdaten wie im mehrstufigen Ansatz verwendet werden. In Tabelle 5 sind die Portfolios dieser Optimierungsstrategie quartalsweise angegeben, deren Rendite eine Varianz von 0.069 aufweist.

Periode	Aktienmarkt				Gvt 5y Total Return			
	DAX	DJI	Nikkei	SPI	Ger	US	Jn	Sz
1. Quartal	0.0%	6.0%	9.1%	15.9%	0.0%	0.0%	13.3%	55.7%
2. Quartal	12.6%	2.6%	8.9%	8.7%	2.2%	0.0%	3.5%	61.5%
3. Quartal	16.0%	2.0%	6.8%	3.1%	10.5%	0.0%	6.9%	54.7%
4. Quartal	0.0%	0.0%	11.4%	21.8%	14.5%	0.0%	3.7%	48.7%
5. Quartal	3.1%	4.7%	4.6%	21.1%	7.3%	0.0%	11.3%	47.9%
6. Quartal	0.0%	0.8%	13.0%	13.4%	0.0%	11.8%	5.7%	55.3%
7. Quartal	0.5%	8.2%	11.2%	2.5%	30.7%	3.8%	0.0%	43.2%
8. Quartal	0.0%	3.0%	3.5%	7.2%	37.3%	29.2%	0.0%	19.8%
st. Vergleichsrendite			0.239					
Volatilität			0.069					

Tabelle 5: Folge von einperiodischen Markowitz-Ansätzen

Ein Vergleich zum mehrperiodischen Ansatz zeigt, dass diese Rebalancierungsstrategie mit einer höheren Volatilität verbunden ist (0.069 zu 0.059 im mehrperiodischen Ansatz). Der Grund dafür ist, dass im mehrperiodischen Ansatz die erwartete stetige Rendite von Quartal zu Quartal unterschiedlich hoch ist. Sie variiert von 2.06% im 8. Quartal bis 4.72% im 2. Quartal und ist ein Ergebnis des Optimierungsprozesses. Dahingegen ist die erwartete stetige Rendite bei der Folge von einperiodischen Optimierungen immer gleich gross. Untersucht man

die quartalen Volatilitäten, so erkennt man, dass im 2. Quartal die Volatilität am geringsten und im 8. Quartal am höchsten ist. D. h. der mehrstufige Ansatz verzichtet in Perioden hoher Volatilität auf Rendite, um die Volatilität niedrig zu halten. Sind dagegen die allgemeinen Volatilitäten niedrig, so wird in der Periode eine hohe Rendite angestrebt. Dieses Phänomen ist in dieser Studie klar erkenntlich, obwohl es von dem tendenziellen Streben des Anlegers in den Kapitalmarkt zu späteren Zeitpunkten überlagert wird.

4 Bemerkungen

Diese Fallstudie hat gezeigt, dass die Volatilität von einem Portfolio durch Rebalancierungen verringert werden kann, falls die Rebalancierungen unter Berücksichtigung der zukünftigen Entwicklung der Varianzen und Kovarianzen der Anlagemöglichkeiten durchgeführt werden. Dieses geschieht in dem mehrperiodischen Erwartungswert-Varianz-Ansatz.

Die ex post Situation ergibt, dass die quartale Entwicklung der Varianz-Kovarianz-Matrix bekannt ist und nicht stochastisch modelliert werden muss, so dass man sich auf einen Pfad stützt. Damit geht jedoch der grösste Vorteil des mehrstufigen Ansatzes verloren, da er die Stochastizität im Markt mit berücksichtigen kann. Kombiniert man das mit einer rollenden Planung, so wird der Vorteil gegenüber einer *Buy and hold* Strategie ersichtlich, denn diese benötigt die Schätzungen der erwarteten Renditen und der Varianz-Kovarianz-Matrix für einen langen Zeitraum. Die Schätzungen im mehrperiodischen Ansatz sind dagegen prozessorientiert, d. h.

- man benötigt die Varianz-Kovarianz-Matrix für die erste Periode (z. B. Quartal),
- spätere mögliche Rendite/Varianz-Kovarianz-Matrix Entwicklungen werden in einem Szenariobaum zusammengefasst und
- es findet eine periodische Adjustierung des Szenariobaums um die letzten Entwicklungen statt.

Abschliessend sind noch zwei Punkte zu nennen. Zum einen lässt Tabelle 3 ein grosses Mass an Rebalancierungsaktivitäten erkennen, die in der Praxis mit Kosten verbunden sind. Die Integration von Transaktionskosten in das Modell bewirkt, dass Rebalancierungen mit Renditeverlusten bestraft werden, und damit wird implizit der Trade-off zwischen Volatilität verringernden Rebalancierungen und Transaktionskosten optimiert. Zum anderen muss die Zielfunktionsproblematik nochmals angesprochen werden. Ihre algorithmische Vereinfachung bewirkt ein stetiges Abwandern in risikoärmere Anlagen und überlagert positive

Effekte des mehrstufigen Erwartungswert-Varianz-Ansatzes. Die Integration dieser beiden Punkte in den Modellansatz ist bereits geschehen, aber noch nicht implementiert worden.