Unternehmenswert bei bivalenten Zahlungsüberschüssen

von Prof. Dr. Dr. h.c. Klaus Spremann

CFB00399293

» Executive Summary

» Der Unternehmenswert ist gleich der Summe der diskontierten zukünftigen Zahlungsüberschüsse oder Cash Flows. Diese zukünftigen Cash Flows sind unsicher. Die meisten Bewertungsmodelle beschreiben die Cash Flows durch ihre jeweiligen Erwartungswerte und verwenden für die Bestimmung der Barwerte die klassische Diskontierungsformel mit einem risikoadäquaten Kapitalkostensatz. So wird jeder Cash Flow durch ein Szenario beschrieben. Alternativ dazu wird vorgeschlagen, die für die unsicheren Cash Flows zwei Szenarios aufzustellen, wobei eines das Ergebnis der wirtschaftlichen Aktivität bei "guten" allgemein wirtschaftlichen Umständen, das andere das Resultat bei "schlechten" Umständen erfasst. Mit Hilfe der Optionstheorie und unter Verwendung risikoneutraler Wahrscheinlichkeiten wird eine geschlossene Formel für den Unternehmenswert hergeleitet. Sie zeigt, dass Chancen nur dann den Wert erhöhen, wenn sie sich auf die ersten Jahre beziehen, während hinsichtlich der langen Frist nur die Barwerte der Cash Flows im jeweils schlechteren Fall bewertungsrelevant sind.

» The value of a company is defined as the sum of all discounted future cash flows. For any point of time, the cash flow is uncertain. Most valuation models start by describing all these cash flows by their expected values and determine the present values using the classical formula of discounting with a risk adequate cost of capital. Thus, each of the uncertain cash flows is described by one scenario. Alternatively, we propose to describe each cash flow by two scenarios, one refers to the result of economic activity of the company if the situation will be "good", the other gives the magnitude of the cash flow for the case the situation will be "bad". Thus, cash flows can have two possible realizations. Using option theory and risk neutral probabilities, we can give a closed formula for the value of the company. It is shown that the value of the corporation is enhanced by chances (of high cash flows under good circumstances) only if the chances appear in the short term, while it depends, regarding the longer term, only on the cash flows which can be generated also under bad circumstances.

I. Problemstellung

1. Traditionelle Bewertung

Nach weithin geteilter Ansicht ist der Wert einer Unternehmung gleich der Summe der Barwerte aller zukünftigen Zahlungsüberschüsse, die in ihren Verfügungsbereich gelangen (*Williams* 1938)[1]. Abgekürzt kann dies so dargestellt werden:

$$(1) \quad Wert = Barwert(Z_{t_1}) + Barwert(Z_{t_2}) + Barwert(Z_{t_3}) + \ldots$$

Dabei sind t_1, t_2, t_3, ... die Zeitpunkte, zu denen Zahlungsüberschüsse erzeugt und frei werden. Z_{t_k} ist die zu t_k fällige, unsichere Zahlung. Der Ausdruck *Barwert* (Z_{t_k}) steht für den auf den Zeitpunkt der Bewertung bezogenen Preis, den der Anspruch auf diese zukünftige Zahlung Z_{t_k} in einem „gut funktionierenden" Kapitalmarkt hätte – also ihr Wert oder Barwert. Wir folgen der Begriffsbildung, nach der unter dem Wert eines Objekts der Preis verstanden wird, den es in einem gut funktionierenden Markt hat oder hätte (wogegen andere Bewertungen den Nutzenwert für einen konkreten Entscheidungsträger modellieren). Wenn es in der Realität keinen gut funktionierenden Markt gibt, können Werte nicht über die Preise beobachtet werden. Die Ermittlung der Barwerte muss dann in einem Modell des gut funktionierenden, kurz des perfekten Marktes erfolgen.

Aufgrund der in (1) ausgedrückten Wertadditivität (*Schall* 1974)[2] genügt im Folgenden, *einen* der Zeitpunkte herauszugreifen, zu denen Zahlungsüberschüsse erzeugt, frei und den Berechtigten zur Verfügung gestellt werden. Er sei mit t bezeichnet. Der Zeitpunkt, auf den sich der Wert bezieht, sei $s = 0$ („heute"). Wir betrachten in dieser Arbeit Möglichkeiten der Beschreibung der unsicheren Zahlung Z_t sowie die Berechnung ihres Barwertes. Tatsächlich führt die Formel (1) auf zwei Aufgaben:

Erstens muss eine Vorstellung darüber entwickelt werden, wie die unsichere und zum Zeitpunkt t anfallende Zahlung Z_t beschrieben und prognostiziert werden kann. In der Regel werden Risikosituationen unterstellt (und nicht allgemeine Arten der Unsicherheit oder Ungewissheit). Deshalb müssen die möglichen Realisationen von Z_t und die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten aufgestellt werden. Dabei ist wichtig, ob und auf welche Weise die zufällige Zahlung Z_t von anderen Entwicklungen in der Wirtschaft abhängt, die ebenso unsicher sein dürften: Z_t ist als *bedingte Wahrscheinlichkeitsverteilung* aufzustellen. Eventuell ist auch bedeutend, ob und wie sich die zum (heutigen) Bewertungszeitpunkt aufgestellte bedingte Wahrscheinlichkeitsverteilung im Verlauf der Zeit ändern könnte, wenn neue Informationen eintreffen.

Die zweite Aufgabe verlangt, den heutigen Preis zu bestimmen, den eine bedingte und zufällige Zahlung Z_t in einem „gut funktionierenden" Kapitalmarkt hätte, wie er für die Bewertung unterstellt wird. Hier sind gewisse Abstraktionen und Idealisierungen gegenüber der Realität verlangt, weil die Marktgegebenheiten der Wirklichkeit mehr oder minder vom Modell des idealen oder perfekten Marktes abweichen dürften. Der im Marktmodell bestimmte Preis der Zahlung Z_t ist der gesuchte Barwert.

Bei den Antworten auf diese beiden Fragen – 1. Wie wird die unsichere Zahlung formal beschrieben? 2. Welches ist ihr Preis im Marktmodell, kurz, wie wird diskontiert? – bestehen gewisse Freiheiten bei der Modellierung. Wir rekapitulieren zuerst die übliche Antwort und damit die traditionelle Art und Weise, unsichere Zahlungen zu modellieren und zu bewerten. Anschließend befassen wir uns mit einer alternativen Antwort. Der Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist diese

1 Vgl. Williams, J. B., The Theory of Investment Value, 1938, vom Verlagshaus Fraser in Burlington, Vermont, 1997 als Buch wieder aufgelegt.

2 Vgl. Schall, L. D., The Lease-Or-Buy and Asset Acquisition Decisions, in: The Journal of Finance, Vol. 29, No. 4/1974 S. 1203 (1214).

» AUTOR Prof. Dr. Dr. h.c. Klaus Spremann

Prof. Dr. Dr. h.c. Klaus Spremann, Schweizerisches Institut für Banken und Finanzen, Universität St. Gallen, Rosenbergstrasse 52, CH-9000 St. Gallen, Schweiz, klaus.spremann@unisg.ch.

Jede bivalente Zahlung stellt eine digitale Option dar, die mit risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten bewertet werden kann.

alternative Art, unsichere Zahlungen zu modellieren und zu bewerten.

Bei der traditionellen Vorgehensweise wird die Zahlung Z_t vorab durch ihren Erwartungswert $E[Z_t]$ beschrieben. Es bietet sich die Interpretation an, dass *ein* Szenario aufgestellt wird, und zwar das erwartete Szenario. Sodann wird postuliert, dass die Zahlung Z_t nicht als Ergebnis eines Zufallsexperiments aufgefasst werden darf, das von sonstigen wirtschaftlichen Entwicklungen unabhängig wäre. Stattdessen wird ein *korrelativer Zusammenhang* mit dem Marktindex unterstellt. Der formale Rahmen, der dabei angesprochen und vorausgesetzt wird, ist das *Single-Index Model* (*Sharpe* 1964)[3]. Die Korrelation zwischen der Zahlung und dem Marktindex weist auf das systematische Risiko hin. Insoweit das mit der Zahlung Z_t verbundene „Schwankungsrisiko" mit dem Marktindex „gleichgerichtet" ist, kann es nicht diversifiziert werden.

Das nicht-diversifizierbare Risiko wird durch das *Beta* gemessen. Das Beta drückt folglich die Stärke der „Bedingtheit" der Zahlung Z_t in Bezug auf den Marktindex aus. Insgesamt verlangt die Beantwortung der ersten Frage die Aufstellung des erwarteten Szenarios für Z_t und die Ermittlung des Betas. Für die zweite Frage wird das CAPM herangezogen. Es folgt aus dem Single-Index Model und vermittelt einen Zusammenhang zwischen dem Beta und der Höhe der erwarteten Rendite. Sie wird zur Diskontierung der prognostizierten Zahlung $E[Z_t]$ herangezogen. Für die Diskontierung wird somit eine dem (systematischen) Risiko entsprechende Vergleichsrendite verwendet, die sich aus dem Zinssatz und einer Risikoprämie zusammensetzt.

Dieser Weg – Prognose der Zahlung mit $E[Z_t]$ in einem einzigen, dem erwarteten Szenario sowie die Diskontierung mit der Risikoprämienmethode – wird in der Praxis überwiegend eingeschlagen. Zumeist haben Anwender keine besondere Mühe, die erwartete Höhe der Zahlung zu schätzen, also das erwartete Szenario aufzustellen. Indessen sehen sie gelegentlich Schwierigkeiten bei der Bestimmung von Beta. Sie greifen dann auf Analogien oder Expertenmeinungen zurück. Allerdings zeigten frühe empirische Arbeiten, dass das Beta nur geringe Zeitstabilität aufweist. Historische Daten ohne Adjustierung liefern daher keine guten Vorlagen für das benötigte zukünftige Beta. Abgesehen von Problemen mit dem Beta wurde in der theoretischen Forschung die Risikoprämienmethode an sich kritisiert (*Robichek/Myers* 1965 und 1976[4]; *Kruschwitz* 2001[5]; *Wilhelm* 2002[6]). Denn sie führt in besonderen Situationen auf wenig intuitive Konstellationen.

3 Vgl. Sharpe, W.F., A Simplified Model of Portfolio Analysis, in: Management Science 9/1963, S. 277 (293).

4 Vgl. Robichek A. A. / Myers, S. C., Optimal Financing Decisions, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1965 und Robichek, A. A. / Myers, S. C., Conceptual problems in the use of risk-adjusted discount rates, in: Modern developments in financial management (Hrsg.: Myers, S.C.), Hinsdale 1976, S. 306 (309).

2. Eine Alternative

Wir wollen eine alternative Möglichkeit aufgreifen, die unsichere Zahlung Z_t zu beschreiben und zu bewerten. Ausgangspunkt ist die Beobachtung, dass sich Praktiker oft in der Lage sehen, *zwei* Szenarien zu zeichnen, die sich auf eine „gute" beziehungsweise „schlechte" wirtschaftlichen Situation für die Unternehmung beziehen. Das Unterscheidungsmerkmal kann in der allgemeinen wirtschaftlichen Entwicklung liegen oder im Branchengeschehen. Ebenso könnte der Verlauf der Rohstoffpreise, die Zinsen oder die Inflation festlegen, ob zu t eher die als gut oder die als schlecht bezeichnete Situation vorliegt. Selbstverständlich kommen andere Einflussfaktoren ebenso in Frage.

Werden zu der als relevant erachteten Entwicklung – wie Gesamtmarkt, Branche, Rohstoffpreise, Zinsen, Inflation – historische Daten erhoben, dann kann aus ihnen die Wahrscheinlichkeit errechnet werden, in der zu t die gute beziehungsweise schlechte Situation eintritt. Nach der Feststellung des relevanten Einflussfaktors und der Vorunterscheidung der beiden Situationen stellt der Anwender die jeweiligen Ergebnisse so auf:

Falls zu t die gute Situation vorliegt, soll die unsichere Zahlung Z_t die Höhe H_t haben.

Falls zu t die schlechte Situation vorliegt, soll ihre Realisation L_t sein.

Bei dieser Beschreibung der bedingten Zahlung Z_t, welche die beiden Zahlenwerte H_t und L_t annehmen kann (Bivalenz), weist die Spanne $H_t - L_t$ auf das Risiko hin.

Diese Beschreibung des Zahlungsüberschusses führt auf das *Bivalenz-Modell*. Zunächst muss der Indikator identifiziert werden, der die als gut beziehungsweise schlecht bezeichneten Situationen festlegt. Sodann wird die bivalente Zahlung Z_t mit Hilfe risikoneutraler Wahrscheinlichkeiten bewertet (*Harrison/Kreps* 1979[7]; *Cox/Ross/Rubinstein* 1979[8]).

II. Das Bivalenz-Modell

1. Die Zahlung und die digitale Option

Um das Bivalenz-Modell zu präzisieren, muss ein Indikator identifiziert werden, der festlegt, ob zum Fälligkeitszeitpunkt t der zu bewertenden Zahlung Z_t die Situation eintritt, in der sie H_t als Realisation hat (wir sprachen von der guten Situati-

5 Vgl. Kruschwitz, L., Risikoabschläge, Risikozuschläge und Risikoprämien in der Unternehmensbewertung, in: Der Betrieb 54/2001 S. 2409 (2413).

6 Vgl. Wilhelm, J., Risikoabschläge, Risikozuschläge und Risikoprämien – Finanzierungstheoretische Anmerkungen zu einem Grundproblem der Unternehmensbewertung. Diskusssionsbeitrag B-9-02, Wirtschaftswissenschaftliche Fakultät, Universität Passau, 2002.

7 Vgl. Harrison, J. M. / Kreps, D.: Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities, in: Journal of Economic Theory 20/1979 S. 381 (408).

8 Vgl. Cox, J. C. / Ross, S. A. / Rubinstein, M., Option Pricing: A Simplified Approach, in: Journal of Financial Economics 7/1979 S. 229 (263).

on), oder den Zahlenwert L_t annimmt (schlechte Situation). Die Indikatorvariable sei mit X_t bezeichnet. Es soll sich dabei um eine Zufallsgröße handeln; weiter unten werden zusätzliche Annahmen getroffen.

Wir beginnen mit einer einfachen Version des Bivalenz-Modells: Die Wahrscheinlichkeiten für die gute und die schlechte Situation sollen jeweils $^1/_2$ sein (wird in II.1 verallgemeinert), so dass die beiden Situationen durch den Median des Indikators X_t getrennt werden. Damit ist die bedingte Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zahlung Z_t beschrieben. In Abhängigkeit des Indikators X_t hat sie die Höhe L_t beziehungsweise H_t und die Eintrittswahrscheinlichkeit ist jeweils $^1/_2$:

$$(2) \quad Z_t = \begin{cases} L_t \Leftrightarrow X_t \le Median \\ H_t \Leftrightarrow X_t > Median \end{cases}$$

Die Zahlung Z_t setzt sich nach (2) in jedem Fall aus L_t zusammen. Hinzu kommt der Unterschied $H_t - L_t$, falls der Indikator zu t seinen Median übersteigt. Man kann die bedingte Zahlung auch grafisch durch ein Payoff-Diagramm darstellen. Auf der Abszisse werden die möglichen Realisationen der (eindimensionalen) Zufallsgröße X_t betrachtet. Auf der Ordinate werden die ihnen entsprechenden Realisationen der Zahlung Z_t gezeigt.

Das Payoff-Diagramm hat Treppenform. Links von *Median* hat sie das Niveau L_t, rechts davon das Niveau H_t. Die Treppenstufe hat die Höhe $H_t - L_t$. Die Zahlung Z_t erweist sich damit eine einfache Transformation einer digitalen Option. Eine digitale Option bietet dem Inhaber im Ausübungsfall (Kurs des Underlyings übersteigt den Ausübungspreis) eine Zahlung in Höhe einer Geldeinheit. Sie wird daher auch als Cash-or-Nothing-Option bezeichnet.

Die digitale Option beziehe sich auf den Indikator X_t als Underlying, habe den Verfallstermin t und *Median* als Ausübungspreis. Diese mit *DigOpt* bezeichnete digitale Option wird genau dann ausgeübt, wenn zu t der Fall $X_t > Median$ vorliegt. Sie bringt dem Inhaber in diesem Fall eine Geldeinheit. Andernfalls, wenn $X_t \le Median$ eintritt, lässt der Inhaber die digitale Option verfallen. Der Zahlungsüberschuss Z_t hängt wie folgt mit der digitalen Option zusammen:

$$(3) \quad Z_t = L_t + (H_t - L_t) \times DigOpt$$

Die Zahlung bietet den Geldbetrag L_t in jedem Fall und zusätzlich $H_t - L_t$ Geldeinheiten, sofern zu t die Situation $X_t > Median$ eintritt. Wäre es möglich, die digitale Option zu bewerten, so würde der Wert der Zahlung Z_t feststehen. Man müsste nur den t fälligen, sicheren Betrag L_t (mit dem Zinssatz) diskontieren. Hinzu käme das $H_t - L_t$-fache des Werts der digitalen Option. Ihr Wert drückt aus: Was ist der (heutige) Preis für die Zahlung eines Euros, die zu t im Fall geleistet werden wird, dass dann $X_t > Median$ vorliegt.

2. Einbettung in einen Kapitalmarkt

Die Frage nach dem Wert der digitalen Option kann beantwortet werden, sofern die bisherige Situationsbeschreibung in ein umfassenderes Modell eines Kapitalmarktes eingebettet wird. Die Anreicherung soll erlauben, jene Methoden anwenden zu können, mit denen Optionen bewertet werden. In Anlehnung an die Optionspreistheorie treffen wir vier Annahmen:

Annahme 1: Die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Indikatorvariable X_t ist das Ergebnis einer geometrischen Brownschen Bewegung. Der heutige Indikatorstand X_0 sei eine gegebene sichere Größe und $\{X_s \mid 0 \le s \le t\}$ bezeichne den stochastischen Indikatorprozess.

Annahme 2: Es ist jederzeit (zu allen Zeitpunkten s, $0 \le s \le t$) möglich, Geldbeträge in diesen Indikatorprozess anzulegen und auch Leerverkäufe sollen möglich sein.

Annahme 3: Außerdem sei es möglich, Geld sicher zu einem (stetigen) Zinssatz anzulegen. Der Zinssatz sei konstant und mit r_f bezeichnet. Daneben soll es möglich sein, zu diesem Zinssatz Kredit aufzunehmen.

Annahme 4: Es gebe keine Transaktionskosten. Änderungen an Portfolios, die aus den beiden genannten Anlagen (Indikator, Festzins) gebildet sind, können zu jedem Zeitpunkt s, $0 \le s \le t$, vorgenommen werden. Der durch den Index und die sichere Anlage aufgespannte Kapitalmarkt soll arbitragefrei sein.

Die erste und zweite Annahme stellen Standardannahmen der Optionspreistheorie. dar. Praktisch wird damit verlangt, dass der Indikator durch einen Marktindex repräsentiert wird. Das wirkt zunächst recht einschränkend. Allerdings können für die verschiedensten wirtschaftlichen Entwicklungen Long-Short-Portfolios konstruiert werden, die den Indikator als Renditeprozess abbilden (*Fama/French* 1993[9]). Die zweite und dritte Annahme spannen ein recht einfaches Kapitalmarktmodell auf. Nur zwei originäre Finanzinstrumente werden gehandelt: der Indikator und die sichere Anlage. Mit der Annahme 4 können in diesem Kapitalmarkt friktionslos Portfolios aus diesen Instrumenten gebildet und bewertet werden. Trotz der Einfachheit des modellierten Kapitalmarktes ist der Risikobegriff festgelegt, und zwar als Exposure gegenüber dem Indikator. Zudem sind der Drift des Indikatorprozesses und der Zinssatzes offenkundig das Ergebnis eines Preisanpassungsprozesses, in den die (nicht eigens erwähnten) Zeit- und Risikopräferenzen der Marktteilnehmer einfließen: Ein hoher Zinssatz deutet darauf hin, dass die allgemeine Ungeduld der Marktteilnehmer groß ist. Hat der Drift einen höheren Zahlenwert, dann ist die allgemeine Risikoaversion ausgeprägter. Aus den Daten ergibt sich deswegen auch der Preis für abgeleitete Instrumente, so für Optionen, die sich auf den Indikator X_t als Underlying beziehen.

3. Der risikoneutrale Erwartungswert

Die Definition der zu diskontierenden Zahlung nach (2) oder (3) und die vier Annahmen, die das Kapitalmarktmodell festlegen, bilden das Bivalenz-Modell. Es ist reichhaltig genug, um die bivalente Zahlung oder die digitale Option zu bewerten. Ein Weg zur Bewertung von Optionen oder überhaupt von bedingten Zahlungen folgt der Idee der Nachbildung, Replikation oder Duplikation. Frühe und grundlegende Arbeiten hierzu sind *Rubinstein* (1976)[10], *Robichek/Myers* (1976)[11], *Stapleton/Subrahmanyam* (1978)[12] sowie *Kreps/Wil-*

9 Vgl. Cox, J. C. / Ross, S. A. / Rubinstein, M., Option Pricing: A Simplified Approach, in: Journal of Financial Economics 7/1979 S. 229 (263).

10 Vgl. Rubinstein, M., The Valuation of Uncertain Income Streams and the Pricing of Options, in: The Bell Journal of Economics 7/1976 S. 407 (425).

11 Vgl. Robichek, A. A. / Myers, S. C., Conceptual problems in the use of risk-adjusted discount rates, in: Modern developments in financial management (Hrsg.: Myers, S.C.), Hinsdale 1976, S. 306 (309).

12 Vgl. Stapleton, R. C. / Subrahmanyam, M. G., A Multiperiod Equilibrium Asset Pricing Model, in: Econometrica 46/1978 S. 1077 (1096).

son (1980)[13]. Aus dem Indikator und der sicheren Anlage wird ein Portfolio gebildet, das dieselben Eigenschaften wie die zu bewertende Option oder bedingte Zahlung aufweist. Wegen der Arbitragefreiheit (im Kapitalmarktmodell) müssen dann das Original und die Nachbildung denselben Preis haben. Das Portfolio, das die digitale Option (oder die Zahlung) nachbildet, verlangt eine dynamische Replikation. Je nach der Bewegung des Indikators im Augenblick sowie mit dem Verstreichen der Zeit muss das Replikationsportfolio angepasst werden. Wie *Black/Scholes* (1973)[14] gezeigt haben, kann die Replikation durch eine stochastische Differentialgleichung ausgedrückt werden. Ebenso sind diskrete Approximationen möglich, die auf das Binomial-Modell von *Cox/Ross/Rubinstein* (1979)[15] führen. Wie auch immer die Idee der Nachbildung mathematisch formuliert wird: Der Wert einer bedingten Zahlung ergibt sich durch den Erwartungswert aller ihrer möglichen Realisationen, wobei der Erwartungswert nicht mit den natürlichen, sondern mit den so genannten *risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten* ermittelt wird. Der mit den risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten berechnete Erwartungswert, kurz der *risikoneutrale Erwartungswert* der zu t fälligen Zahlung Z_t, wird anschließend mit dem Zinssatz auf den heutigen Zeitpunkt 0 bezogen. Das Ergebnis ist der Barwert der Zahlung. Als Formel:

$$(4)\quad \begin{aligned} Barwert(Z_t) &= \frac{1}{\exp(t \times r_f)} \times \{(1-p_t) \times L_t + p_t \times H_t\} \\ &= \frac{1}{\exp(t \times r_f)} \times \{L_t + p_t \times (H_t - L_t)\} \end{aligned}$$

Hier bezeichnet r_f den stetigen Zinssatz; $1/\exp(t \times r_f)$ ist der Diskontfaktor. Weiter bezeichne p_t die risikoneutrale Wahrscheinlichkeit für den Zustand, dass der Indikator zu t über seinem Median steht. Diese risikoneutrale Wahrscheinlichkeit muss noch ermittelt werden.

Der nach (4) bestimmte Barwert ist der Preis der zu t fälligen unsicheren Zahlung Z_t (im Modell des Kapitalmarktes). Das heißt, es herrschen Bedingungen, zu denen der heutige, sichere und als Barwert bezeichnete Geldbetrag gegen die spätere, unsichere Zahlung Z_t getauscht werden kann. Wird der auf heute bezogene Betrag mit dem Faktor $\exp(t \times r_f)$ aufgezinst, so entsteht ein zu t fälliger, sicherer Geldbetrag. Er hat die Höhe des risikoneutralen Erwartungswerts, also $L_t + p_t(H_t - L_t)$. Im Kapitalmarkt kann – aus heutiger Sicht – dieser zu t fällige Betrag mit der unsicheren, zum selben Zeitpunkt fälligen Zahlung Z_t getauscht werden. Infolgedessen ist $L_t + p_t(H_t - L_t)$ das *Sicherheitsäquivalent* von Z_t im modellierten Markt (*Diedrich* 2003[16]; *Wiese* 2003[17]; *Kürsten* 2003[18]).

Nun wird die risikoneutrale Wahrscheinlichkeit p_t bestimmt. Hierzu bieten sich drei Wege an. Einen ersten Weg öffnet die Bewertungstechnik des Binomial-Modells. Hierbei wird der Wertebereich des Underlyings, also der Bereich der Realisationen des Indikators diskretisiert. Auch der Zeitraum bis zur Fälligkeit wird diskretisiert. Je nach binomialer Entwicklung wird L_t beziehungsweise H_t als Auszahlung des zu bewertenden Instruments eingesetzt. Ein zweiter Weg ergibt sich aus der Annäherung des Payoffs der digitalen Option durch einen Bull-Spread, der sich wiederum aus einer Long-Position eines ersten Calls und einer Short-Position eines zweiten Calls erzeugen lässt, die sich in ihren Ausübungspreisen ein wenig unterschieden. Der eine Ausübungspreis liegt etwas unterhalb des Medians, der zweite etwas darüber. Allerdings ist der Payoff des Bull-Spreads keine Treppenfunktion, weil er zwischen den Ausübungspreisen der beiden Optionen die Steigung 1 hat. Legt man n dieser Spreads übereinander, so wird die Steigung des Payoffs dieses Portfolios in diesem Bereich immer größer. Aus einer Grenzbetrachtung $n \to \infty$ folgt der Wert der digitalen Option (sofern die mit der Grenzbetrachtung verbundenen theoretischen Fragen geklärt werden können). Ein dritter Weg zur Bewertung der digitalen Option ergibt sich über die Größe d_2, die in der Black-Scholes-Formel erscheint. Wir schlagen diesen dritten Weg im Folgeabschnitt ein.

4. Ableitung der risikoneutralen Wahrscheinlichkeit

In der Black-Scholes-Formel (BS-Formel), vergleiche (5), bezeichnet C den Wert der europäischen Call-Option, die zu t fällig wird; S ist der heutige Kurs des Underlyings, K der zum Verfallstermin t relevante Ausübungspreis. Mit ist die Volatilität des Underlyings bezeichnet und mit r_f der stetige Zinssatz. N ist die kumulierte Wahrscheinlichkeit der Standard-Normalverteilung.

$$(5)\quad \begin{cases} C = S \times N(d_1) - \exp(t \times r_f) \times K \times N(d_2) \\ d_1 = \dfrac{\ln\left(\dfrac{S}{K}\right) + \left(r_f + \dfrac{\sigma^2}{2}\right) \times t}{\sigma \times \sqrt{t}} \\ d_2 = d_1 - \sigma \times \sqrt{t} = \dfrac{\ln\left(\dfrac{S}{K}\right) + \left(r_f - \dfrac{\sigma^2}{2}\right) \times t}{\sigma \times \sqrt{t}} \end{cases}$$

Für die Bewertung der Zahlung Z_t gemäß (4) wird das Ergebnis verwendet, dass $N(d_2)$ die risikoneutrale Wahrscheinlichkeit für das Eintreten des Zustands ist, in dem der Preis des Underlyings zu t über dem Ausübungspreis liegt. $N(d_2)$ ist also die risikoneutrale Wahrscheinlichkeit für das Ereignis $S(t) > K$ (*Cox/Rubinstein* 1985[19]). Dieses Ergebnis führt unmittelbar zum Wert der digitalen Option, sofern in der BS-Formel zwei Spezialisierungen vorgenommen werden: Erstens ist das Underlying im vorliegenden Kontext der Indikator X_t. Zweitens: Da die natürlichen Wahrscheinlichkeiten für das gute und das schlechte Ergebnis auf ½ festgesetzt wurden, muss der Ausübungspreis K gleich dem Median von des Indikators X_t gesetzt werden.

13 Vgl. Kreps, D. M. / Wilson R., Temporal Resolution of Uncertainty in Stapleton and Subrahmanyam's „Multiperiod Equilibrium Asset Pricing Model", in: Econometrica 48/1980 S. 1565 (1566).

14 Vgl. Black, F. / Scholes, M., The pricing of options and corporate liabilities, in: Journal of Political Economy 81/1973 S. 637 (659).

15 Vgl. Cox, J. C. / Ross, S. A. / Rubinstein, M., Option Pricing: A Simplified Approach, in: Journal of Financial Economics 7/1979 S. 229 (263).

16 Vgl. Diedrich, R., Die Sicherheitsäquivalentmethode der Unternehmensbewertung: Ein (auch) entscheidungstheoretisch wohlbegründetes Verfahren, in: Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung 55/2003 S. 281 (286).

17 Vgl. Wiese, J., Zur theoretischen Fundierung der Sicherheitsäquivalentmethode und des Begriffs der Risikoauflösung bei der Unternehmensbewertung, in: Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung 55/2003 S. 287 (305).

18 Vgl. Kürsten, W., Grenzen und Reformbedarf der Sicherheitsäquivalentmethode in der (traditionellen) Unternehmensbewertung, in: Zeitschrift für betriebswirtschaftliche Forschung 55/2003 S. 306 (314).

19 Vgl. Cox, J. C. / Rubinstein, M., Options Markets, 1985, Prentice Hall, S. 185.

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20
p	24,2%	16,1%	11,3%	8,1%	5,9%	4,3%	3,2%	2,4%	1,8%	1,3%	0,3%	0,1%
$1-p$	75,8%	83,9%	88,7%	91,9%	94,1%	95,7%	96,8%	97,6%	98,2%	98,7%	99,7%	99,9%

Tab. 1: Die risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten für die Jahre von 1 bis 10 sowie 15 und 20

Der Ausdruck $\ln(S/K)$ in (5) nimmt damit diese Form an:

$$(6)\quad \ln\left(\frac{X(0)}{Median}\right)=\ln(X(0))-\ln(Median)$$
$$=\ln X(0)-\{\ln X(0)+t\times\mu\}=-\mu\times t$$

Bei dieser Umformung wird ein bekannter Zusammenhang verwendet. Während der Indikator einer *geometrischen* Brownschen Bewegung folgt, bewegt sich der Log-Indikator gemäß einer *normalen* Brownschen Bewegung. Sie habe den Drift μ und die Volatilität σ. Der Log-Indikator entwickelt sich folglich gemäß

$$(7)\quad \ln X_s=\ln X_0+r_{0,s}$$

wobei $r_{0,s}$ die stetige Gesamtrendite zwischen den Zeitpunkte 0 und s ist. Diese Gesamtrendite ist normalverteilt, sie hat den Erwartungswert $E[r_{0,s}]=s\times\mu$ und die Varianz $Var[r_{0,s}]=s\times\sigma^2$, also die Standardabweichung $SD[r_{0,s}]=\sqrt{s}\times\sigma^2$. Als Folge ist auch der Log-Indikator $\ln X_s$ normalverteilt mit Erwartungswert $E[\ln X_0]+s\times\mu$ und Standardabweichung $SD[\ln X_s]=\sqrt{s}\times\sigma$. Mit dieser Rekapitulation der Brownschen Bewegung kann der Median der Verteilung X_t aufgestellt werden: Nach Logarithmierung entspricht er dem Median der Verteilung von $\ln X_t$. Doch weil $\ln X_t$ normalverteilt, also symmetrisch ist, entspricht der in (2) verwendete Median nach Logarithmieren dem Erwartungswert von $\ln X_t$ und dieser ist gleich $X(0)+t$. Also gilt $\ln Median = X(0)+t$ wie in (6) verwendet.Wird (6) in die Black-Scholes-Formel eingesetzt, so entsteht:

$$(8)\quad d_2=\frac{-\mu\times t+\left(r_f-\frac{\sigma^2}{2}\right)\times t}{\sigma\times\sqrt{t}}=\left(-\frac{\mu+r_f}{\sigma}-\frac{\sigma}{2}\right)\times\sqrt{t}$$

Die gesuchte risikoneutrale Wahrscheinlichkeit für das Vorliegen eines guten wirtschaftlichen Umfelds, $X_t > Median$, ist folglich:

$$(9)\quad p_t=N\left(\left(-\frac{\mu+r_f}{\sigma}-\frac{\sigma}{2}\right)\times\sqrt{t}\right)=1-N\left(\left(\frac{\mu+r_f}{\sigma}-\frac{\sigma}{2}\right)\times\sqrt{t}\right)$$

Damit ist die bivalente Zahlung bewertet. Ihr Barwert ist der mit dem Zinssatz diskontierte Erwartungswert der beiden Zahlungen L_t und H_t, wie in (4) angegeben. Die dort erscheinende risikoneutrale Wahrscheinlichkeit ist mit (9) berechnet.

Zahlenbeispiel: Als Eingangsgrößen zur Auswertung der Formel (9) werden drei Kapitalmarktgrößen benötigt: der stetige Zinssatz r_f; die Renditeerwartung μ, $\mu > r_f$; und die Volatilität des Indikators. Im Beispiel werde als Indikator der Index des gesamten Aktienmarktes herangezogen. Für die realitätsgerechten Daten $r_f = 4\%$, $\mu = 8\%$, $\sigma = 20\%$ folgt: $p_1 = 24{,}2\%$, $p_2 = 16{,}1\%$, $p_3 = 11{,}3\%$. Damit könnten die bivalenten Zahlungen für die Jahre $t = 1, 2, 3$ bewertet werden.

Ist das Unternehmensergebnis im Jahr $t = 2$ beispielsweise $L_2 = 60$ oder $H_2 = 100$ und werden die genannten Kapitalmarktdaten unterstellt, die auf $p_2 = 16{,}1\%$ führen, dann hat die Zahlung den Barwert $1/\exp(2 \times 0{,}04) \times (60 + 0{,}161 \times 40) = 61{,}33$.

5. Bewertungsformel

Die Formeln (1) und (9) zusammengeführt, ergibt sich für den Unternehmenswert:

$$(10)\quad \begin{cases} Wert=\sum\limits_{t=t_1,t_2,t_3,\ldots}\dfrac{L_t+p_t\times(H_t-L_t)}{\exp(t\times r_f)} \\ p_t=1-N\left(\left(\dfrac{\mu+r_t}{\sigma}+\dfrac{\sigma}{2}\right)\times\sqrt{t}\right) \end{cases}$$

Die Formel (10) ist, was die praktische Seite der vorliegenden Arbeit betrifft, unser Hauptergebnis. Sie zeigt den Unternehmenswert für die Generalannahme, dass in jedem Zeitpunkt, zu dem in der Zukunft Zahlungen erfolgen werden, jeweils nur *zwei* Ergebnisse möglich sind, wie in (2) beschrieben. Für jeden Zahlungszeitpunkt sollen bekannt sein: 1. Der relevante Indikator, sein Drift und seine Volatilität. 2. Die auf den Indikator bezogenen und bedingten Zahlungen wie in (2) beschrieben. 3. Der Zinssatz r_f.

Das vorgeführte Zahlenbeispiel soll noch auf mehrere Zeitpunkte für die Fälligkeit der Zahlungsüberschüsse ausgedehnt werden. Als Zahlungszeitpunkte werden die Jahre $t = 1, 2, \ldots, 10, 15, 20$ betrachtet. Im Beispiel sei der Indikator wiederum der Index, habe den Drift = 8% und die Volatilität = 20%. Der stetige Zinssatz sei wie zuvor $r_f = 4\%$. *Tab. 1* zeigt die risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten gemäß (9) beziehungsweise (10) unten.

Setzt man die tabellierten risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten in die Wertformel (10) ein, so entsteht:

$$(11)\quad Wert=\frac{L_1+0{,}242\times(H_1-L_1)}{\exp(r_f)}+\frac{L_2+0{,}161\times(H_2-L_2)}{\exp(2\times r_f)}$$
$$+\frac{L_3+0{,}113\times(H_3-L_3)}{\exp(3\times r_f)}+\ldots$$

6. Bedeutung von Chancen

Die *Tab. 1* zeigt, dass die Chancen hoher unternehmerischer Ergebnisse, die sich in $H_t - L_t$ ausdrücken, und die sich immerhin mit der natürlichen Wahrscheinlichkeit von ½ manifestieren, alsbald keinen besonderen Wert mehr haben (auch wenn der Zinssatz nicht besonders hoch ist). Bereits mit dem Jahr $t = 6$ beträgt p_6 nur noch 4,3%. Das Sicherheitsäquivalent, also der risikoneutrale Erwartungswert einer bivalenten Zahlung, die zu $t = 6$ entweder $L_6 = 100$ und $H_6 = 1.000$ betragen kann (jeweils mit natürlicher Wahrscheinlichkeit ½), beträgt $L_6 + p_6(H_6 - L_6) = 100 + 0{,}043 \times 900 = 138{,}7$. Wird dieses Sicherheitsäquivalent mit dem Zinssatz $r_f = 4\%$ diskontiert, folgt 109,11 als Barwert.

w \ t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20
0,1	2,4%	1,2%	0,6%	0,4%	0,2%	0,1%	0,1%	0,1%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
0,2	6,2%	3,4%	2,0%	1,2%	0,8%	0,5%	0,4%	0,2%	0,2%	0,1%	0,0%	0,0%
0,3	11,0%	6,5%	4,1%	2,7%	1,8%	1,3%	0,9%	0,6%	0,4%	0,3%	0,1%	0,0%
0,4	17,0%	10,7%	7,1%	4,9%	3,4%	2,5%	1,8%	1,3%	0,9%	0,7%	0,2%	0,0%
0,5	24,2%	16,1%	11,3%	8,1%	5,9%	4,3%	3,2%	2,4%	1,8%	1,3%	0,3%	0,1%
0,6	32,8%	23,1%	16,9%	12,6%	9,5%	7,2%	5,5%	4,2%	3,2%	2,5%	0,7%	0,2%
0,7	43,0%	32,1%	24,6%	19,1%	14,9%	11,7%	9,2%	7,3%	5,8%	4,6%	1,4%	0,5%
0,8	55,6%	44,1%	35,5%	28,8%	23,5%	19,1%	15,6%	12,8%	10,4%	8,5%	3,1%	1,1%
0,9	72,0%	61,5%	52,8%	45,3%	38,8%	33,2%	28,4%	24,2%	20,7%	17,6%	7,6%	3,2%

Tab. 2: Die risikoneutrale Wahrscheinlichkeit für die Jahre 1 bis 10, 15 und 20, für verschiedene natürliche Wahrscheinlichkeiten der guten Ergebnisse. Sie gehen von 0,1 (oberste Zeile) bis 0,9 (unterste Zeile). Die Zahlen in der Zeile für w = 0,5 sind bereits in Tab. 1 dargestellt.

Die aus *Tab. 1* sprechende Beobachtung, dass die Chancen $H_t - L_t$ bereits nach wenigen Jahren nur noch geringe Bedeutung für den Wert haben, gilt allgemein: Denn bei der risikoneutralen Wahrscheinlichkeit kommt es nach (9) darauf an, wie sich das Argument der Normalverteilungsfunktion N verhält. Eine Abschätzung hierzu: Der Ausdruck $(\mu + r_f)/\sigma$ beträgt für empirisch relevante Daten ungefähr ½ und $((\mu + r_f)/\sigma) + \sigma/2$ ist sogar leicht größer als ½. Dieser Ausdruck wird mit $\sqrt{t}$ multipliziert. Für $t \geq 4$ ist das Argument der Funktion N klar größer als 1, für $t \geq 16$ ist es größer als 2 und für $t \geq 36$ deutlich größer als 3. Deshalb konvergiert mit den Jahren $N((((\mu + r_f)/\sigma) + \sigma/2) \times \sqrt{t})$ gegen 1 und die risikoneutrale Wahrscheinlichkeit p_t strebt gegen Null. Die hohen Ergebnisse im Fall einer guten Entwicklung des relevanten Indikators beziehungsweise die Chancen $H_t - L_t$ haben folglich bereits nach wenigen Jahren keinen sonderlichen Wert mehr. Der Barwert einer dichotomen Zahlung wird bereits wenigen Jahren praktisch ausschließlich von jenem unternehmerischen Ergebnis bestimmt, das bei schlechter Entwicklung des Indikators zu verzeichnen ist.

Dieser Erkenntnis folgend haben Unternehmungen, deren Ergebnisse L_t, t = 1, 2, ..., bei schlechtem wirtschaftlichen Umfeld mager sind (L_t ist klein, gleich Null oder sogar negativ)), auch nur geringe Werte. Selbst hohe Chancen $H_t - L_t$, die bei gutem Umfeld eintreten, können das nicht kompensieren. Dieser Sachverhalt fällt besonders dann auf, wenn die anfänglichen Zahlungsüberschüsse L_t, die bei schlechtem Umfeld eintreten, *negativ* sind. In solchen Fällen können sich negative Unternehmenswerte ergeben.

Im Bivalenz-Modell ist infolgedessen der mit dem traditionellen Zinssatz diskontierte „Bodensatz“ L_t der Zahlungsüberschüsse Wert bestimmend, während die Chancen $H_t - L_t$, selbst wenn sie mit einer Wahrscheinlichkeit von immerhin ½ eintreten, kaum werterhöhend wirken. Hierin zeigen sich deutliche Unterschiede zur Unternehmensbewertung nach dem traditionellen Ansatz, der in der Anwendung zu vergleichsweise optimistischeren „Werten“ führt. Als Zahlenbeispiel betrachte man den Barwert der in einem Jahr fälligen unsicheren Zahlung mit $L_1 = -1.000$ und $H_1 = 1.000$. Ihr mit den natürlichen Wahrscheinlichkeiten gebildeter Erwartungswert ist 0. Würde man diese erwartete Zahlung mit der Risikoprämienmethode auf den heutigen Zeitpunkt beziehen, dann wäre der Wert gleich Null, ungeachtet der Höhe der für die Diskontierung herangezogenen Vergleichsrendite. Die Replikation zeigt indes, dass der Wert gleich $(-1.000 + p_1 \times 2.000)/(1 + r_f)$ ist. Für die der Tabelle 1 zugrunde gelegten Daten folgt $p_1 = 0{,}242$, woraus sich der Barwert zu (-1.000 + 484)/exp(0,04) = -495,76 errechnet. Er ist negativ.

III. Allgemein diskret verteilte Zahlungsüberschüsse

1. Andere natürliche Wahrscheinlichkeiten

Das Bivalenz-Modell soll jetzt dahingehend verallgemeinert werden, dass die natürlichen Wahrscheinlichkeiten für die beiden Ergebnisse nicht gleich ½ sind, sondern eine andere Höhe aufweisen: w sei die natürliche Wahrscheinlichkeit für den Zustand, in dem das Ergebnis der Zahlung H_t ist. Beispielsweise könnte sich der Anwender in der Lage sehen, den Zahlungsüberschuss H_t zu spezifizieren, der in den w = 10% der besten Entwicklungen des Umfelds oder des relevanten Einflussfaktors eintritt, während die Unternehmung das Ergebnis L_t in den 90% der schlechteren Verläufen des Umfelds generiert. Es könnte auch sein, dass der Anwender damit rechnet, dass zu t mit einer Wahrscheinlichkeit von w = 99% das Ergebnis H_t eintreten wird, wogegen mit Wahrscheinlichkeit von $1 - w$ = 1% mit einer katastrophalen Entwicklung zu rechnen ist, in der das mit L_t quantifizierte sehr schlechte Resultat vorliegt.

Der Fall $w \neq$ ½ kann mit der entwickelten Methode gelöst werden. Zur Ermittlung der risikoneutralen Wahrscheinlichkeit, dass der Indikator zum Fälligkeitszeitpunkt über dem der gewählten Wahrscheinlichkeit entsprechenden *Quantil* liegt, dient wieder die BS-Formel. Man muss dort den Ausübungspreis K so definieren, dass die natürliche Wahrscheinlichkeit dafür, dass der als Underlying gewählte Marktindex den Ausübungspreis übertrifft, das gewünschte Niveau w besitzt. Der Ausübungspreis K ist (bei $w \neq 50\%$) dann nicht mehr gleich dem Median, sondern gleich dem Quantil, das der vorgegebenen natürlichen Wahrscheinlichkeit entspricht.

Um diesen Ausübungspreis näher zu bestimmen wird darauf zurück gegriffen, dass der Log-Indikator $\ln X_t$ zu t normalverteilt ist und den Erwartungswert $[\ln X_t]$ 0 $\ln X_0 + t \times \mu$ sowie

die Standardabweichung $SD[\ln X_t] = \sqrt{t} \times \mu$ besitzt. Man definiere zu vorgegebener natürlicher Wahrscheinlichkeit w die Größe k so, dass $1 - w = N(k)$ gilt:

(12) $k = N^{-1}(1-w)$

Der Ausübungspreis K_t hat dann die gewünschte Eigenschaft Pr $\{X_t \geq K_t\}$, sofern er wie folgt festgesetzt wird:

(13) $\ln K_t = E[\ln X_t] + k \times SD[\ln X_t] = (\ln X_0 + t \times \mu) + k \times (\sqrt{t} \times \sigma)$

Ähnlich zum Vorgehen wie in (8) bestimmt der über (13) festgesetzte Ausübungspreis den in d_2 benötigten Quotienten $\ln(X_t/K_t)$. Für ihn folgt:

(14) $$\ln\left(\frac{X_t}{K_t}\right) = \ln X_t - \ln K_t = -t \times \mu - k \times \sqrt{t} \times \sigma$$

Dieser Ausdruck verallgemeinert (8), wobei der Unterschied lediglich in $k \times \sqrt{t} \times \sigma$ besteht wobei sich k gemäß (12) aus der natürlichen Wahrscheinlichkeit w des guten wirtschaftlichen Umfelds errechnet. Analog zu (9) ergibt sich mit (14) das der natürlichen Wahrscheinlichkeit w entsprechende d_2:

(15) $$d_2(w) = \frac{-\mu \times t - k \times \sqrt{t} \times \sigma + \left(r_f - \frac{\sigma^2}{2}\right) \times t}{\sigma \times \sqrt{t}} = \left(-\frac{\mu + r_f}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}\right) \times \sqrt{t} - k$$

Dieses ist um k geringer als in (8). Wird (15) als Argument der Normalverteilungsfunktion N genommen, so entsteht in Analogie zu (10) die gesuchte risikoneutrale Wahrscheinlichkeit:

(16) $$p_t(w) = N\left(\left(-\frac{\mu \times r_f}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}\right) \times \sqrt{t} - k\right) = 1 - N\left(\left(\frac{\mu + r_f}{\sigma} - \frac{\sigma}{2}\right) \times \sqrt{t} + k\right)$$

Tab. 2 auf S. 91, die sich auf die bereits genannten Kapitalmarktdaten bezieht (r_f = 4%, μ = 8%, σ = 20%), zeigt die risikoneutrale Wahrscheinlichkeit $p_t(w)$ für verschiedene natürliche Wahrscheinlichkeiten w des guten Ergebnisses: Die Chance $H_t - L_t$ tritt mit der natürlichen Wahrscheinlichkeit w ein. Wie bei der Tabelle 1 sind die Jahre 1 bis 10 sowie 15 und 20 berücksichtigt. Die in Tabelle 2 gezeigte risikoneutrale Wahrscheinlichkeit $p_t(w)$ bestimmt das Gewicht, mit der die Chance $H_t - L_t$ in die Wertermittlung einfließt. In der *Tab. 2* ist w in Schritten von 0,1 berücksichtigt.

Wenn beispielsweise die natürliche Wahrscheinlichkeit für H_t nicht ½ sondern nur w = 0,2 ist und folglich das Ergebnis L_t eine natürliche Wahrscheinlichkeit von 0,8 hat, dann ergibt sich der Unternehmenswert so:

(17) $$Wert = \frac{L_1 + 0{,}062 \times (H_1 - L_1)}{1 + i_0} + \frac{L_2 + 0{,}034 \times (H_2 - L_2)}{(1 + i_0)^2} + \frac{L_3 + 0{,}020 \times (H_3 - L_3)}{(1 + i_0)^3} + \ldots$$

Die Chancen $H_t - L_t$ haben somit, abgesehen von den drei ersten Jahren, auch im verallgemeinerten dichotomen Modell kein besonderes Gewicht bei der Unternehmensbewertung, sofern ihre natürliche Wahrscheinlichkeit kleiner als 50% ist.

2. Drei und mehr Ergebnisse

Diese Verallgemeinerung legt den Grundstein für ein allgemeines Bewertungsmodell für diskret verteilte Zahlungsüberschüsse. Um nicht mit Symbolik zu überladen, zeigen wir den wesentlichen Schritt der Verallgemeinerung von zwei auf $n > 2$ mögliche Ergebnisse an einem Beispiel. Angenommen, zu t seien drei Ergebnisse möglich: Das schlechteste sei mit C_t und das beste mit A_t bezeichnet, doch nun sei noch ein dazwischen liegendes Ergebnis B_t möglich. Die natürlichen Wahrscheinlichkeiten sollen w_A, w_B, w_C sein (sie sind positiv und summieren sich zu 1). Gesucht sind die drei risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten, die mit p_A, p_B, p_C bezeichnet sein sollen – der Zeitindex ist hier unterdrückt. Als Bedingungen folgen:

(18) $$p_C = p_t(w_C)$$
$$p_B + p_C = p_t(w_B + w_C), \text{ also } p_B = p_t(w_B + w_C) - p_t(w_C)$$

und $p_A = 1 - p_B - p_C$. Ein Zahlenbeispiel: t = 4, C_4 = 100, B_4 = 200, A_4 = 1.000; w_A = 20%, w_B = 60%, w_C = 20%. Die Kapitalmarktdaten seien wieder r_f = 4%, μ = 8%, σ = 20%. Tabelle 2 zeigt mit (22) die risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten: $p_C = p_t(w_C) = p_4(0{,}2) = 0{,}012$; $p_B = p_t(w_B + w_C) - p_t(w_C)$ bedeutet $p_B = p_4(0{,}2 + 0{,}6) - p_4(0{,}2) = 0{,}128 - 0{,}012 = 0{,}116$; $p_A = 1 - p_B - p_C = 0{,}872$. Der risikoneutrale Erwartungswert ist $p_C \times C_4 + p_B \times B_4 + p_A \times A_4$ und das ergibt 0,872 × 100 + 0,116 × 200 + 0,012 × 1000 = 122,4. Eine anschließende Diskontierung mit dem Zinssatz liefert den Barwert $122{,}4/\exp(4 \times r_f) = 104{,}31$.

Nach diesem Schema kann der Barwert beliebiger diskreter Zahlungen bestimmt werden, die n_t mögliche Realisationen im Jahr t haben können.

IV. Konklusion

1. Eine Gegenüberstellung

Abschließend ein kurzer Vergleich zwischen der traditionellen und der alternativen Beantwortung der beiden eingangs genannten Fragen gezogen.

Zur ersten Frage: Wie wird die Zahlung beschrieben? Beide Perspektiven sehen die zufällige Zahlung als *bedingte Wahrscheinlichkeitsverteilung*. Im traditionellen Bewertungsverfahren wird die Bedingtheit durch den korrelativen Zusammenhang zwischen der Zahlung und dem Marktindex ausgedrückt, also durch das Beta. Im hier ausgeführten alternativen Ansatz hängt die Zahlung davon ab, ob zu t die gute oder die schlechte Situation eingetreten sein wird. Was eine gute und was eine schlechte Situation ist, hängt von der Entwicklung des gewählten Indikators ab. Dabei kann es sich um den Marktindex handeln, um den Branchenindex, um einen Rohstoffpreis, ein speziell konstruiertes Portfolio oder eine andere Finanzgröße.

Zur zweiten Frage: Wie wird der *Barwert* der unsicheren Zahlung bestimmt? Beide Perspektiven ziehen, jeweils auf ihre Weise, finanztheoretische Schlüsse. Im traditionellen Ansatz entsteht aufgrund der Relation von Barwert und Zahlung eine Rendite, die mit den anderen Renditen im Kapitalmarkt hinsichtlich des systematischen Risikos verglichen wird. Die Grundaussage lautet, dass Investitionen, die ein gleich hohes systematisches Risiko haben, mit

übereinstimmender Risikoprämie bepreist werden. Im alternativen Ansatz wird gefragt, wie sich die Zahlung durch andere Instrumente, die im Kapitalmarkt bereits einen Preis gefunden haben, anhand risikoneutraler Wahrscheinlichkeiten bewerten lässt. Die risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten beruhen auf einer Nachbildung zustandsabhängiger Zahlungen. Die Grundaussage bei der Nachbildung lautet, dass zwei Finanzinstrumente, die in allen Zuständen übereinstimmende Zahlungen bieten, in ihren Werten übereinstimmen.

Beide Perspektiven nehmen gewisse *Vereinfachungen* vor: Der traditionelle Ansatz geht davon aus, dass die unsichere Zahlung im Hinblick auf ihre Bewertung bereits vollständig beschrieben ist, sobald ihre erwartete Höhe und das Beta bekannt sind. Der alternative Ansatz geht davon aus, dass die unsichere Zahlung hinreichend genau beschrieben ist, sobald die beiden Szenarien aufgestellt sind, eben die Höhen in der guten beziehungsweise schlechten Situation.

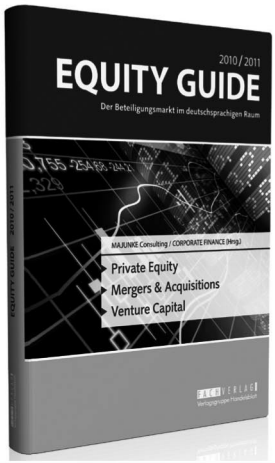
Beide Perspektiven treffen schließlich Annahmen hinsichtlich des modellierten Kapitalmarktes: Im traditionellen Ansatz müssen der Marktindex bekannt und das CAPM gültig sein. Anders ausgedrückt: Das Single-Index Model muss gelten. Im alternativen Ansatz stehen hingegen diese Annahmen an den Kapitalmarkt im Vordergrund: Der Indikator, der die gute von der schlechten Situation trennt, muss durch ein gehandeltes Finanzinstrument repräsentiert und der Markt muss arbitragefrei sein.

2. Frühe Chancen und späte Gefahren

Die risikoneutralen Wahrscheinlichkeiten sind hier explizit angegeben, siehe (10), und für realistische Kapitalmarktdaten tabelliert. Eine Abschätzung ihrer numerischen Größe zeigt, dass die Chancen, das bessere Ergebnis zu erreichen, mit zunehmenden Jahren kaum Einfluss auf den Unternehmenswert haben. Der Unternehmenswert stimmt praktisch mit der Summe der mit dem Zinssatz diskontierten Ergebnisse überein, die im schlechteren Fall erzielt werden. Die Chancen, das bessere Ergebnis zu erhalten, wirken sich nur für die allerersten Jahre auf den Wert aus.

Die Arbeit unterstreicht einen Punkt: Bei baldigen Zahlungsüberschüssen zählen die Chancen, bei späteren Zahlungsüberschüssen werden die Gefahren gewichtig. Im Bivalenz-Modell fallen weit in der Zukunft liegende Zahlungsüberschüsse nicht einfach weg, weil sie „stark" mit den sonst bei der Risikozuschlagsmethode üblichen Vergleichsrenditen (von 10% oder 12%) diskontiert werden. Denn im Bivalenz-Modell wird nur mit dem Zinssatz diskontiert, weshalb auch weiter in der Zukunft liegende Ergebnisse durchaus einen nennenswerten Einfluss auf den Unternehmenswert haben. Allerdings sind praktisch nur die Ergebnisse relevant, die im schlechteren Fall generiert werden. Von daher ist zu befürchten, dass die zweifellos stets vorhandenen Chancen bei der traditionellen Unternehmensbewertung zu überhöhten Bewertungen führen. Im Bivalenz-Modell machen sich die Chancen hoher Ergebnisse eben nur in den allerersten Jahren im Wert bemerkbar.

CORPORATE FINANCE



Equity Guide Neuerscheinung Januar 2011

Der Beteiligungsmarkt im deutschsprachigen Raum

▶ Der Equity Guide 2010/2011 ist ein umfangreiches Nachschlagewerk über die Segmente Private Equity, Mergers & Acquisitions sowie Venture Capital im deutschsprachigen Raum.

MAJUNKE Consulting/CORPORATE FINANCE (Hrsg.)
Equity Guide – Der Beteiligungsmarkt im deutschsprachigen Raum
ISBN 978-3-942543-08-8; Preis: € 69,00 inkl. MwSt., zzgl. Versand; 276 Seiten

Bestellungen per Fax: 0800/0002959

Oder Kupon per Post an: Fachverlag der Verlagsgruppe Handelsblatt GmbH • Kundenservice • Postfach 92 54 • 97092 Würzburg

☐ **Ja, ich bestelle:**
Equity Guide – Der Beteiligungsmarkt im deutschsprachigen Raum
zu € 69,00 inkl. MwSt., zzgl. Versand

Weitere Infos:
08 00/000 16 37
kundenservice@fachverlag.de
www.fachverlag-shop.de

☐ Firma ☐ Privat

Name, Vorname
Firma (nur bei Firmenanschrift angeben)
Beruf/Funktion/Abteilung
Straße, Nr.
PLZ, Ort
Telefon (für evtl. Rückfragen)
E-Mail (für evtl. Rückfragen)
Datum/Unterschrift CFAN1102

☐ Ich bin damit einverstanden, dass mich die Handelsblatt-Gruppe zukünftig über interessante Produkte per E-Mail/Telefon informiert.